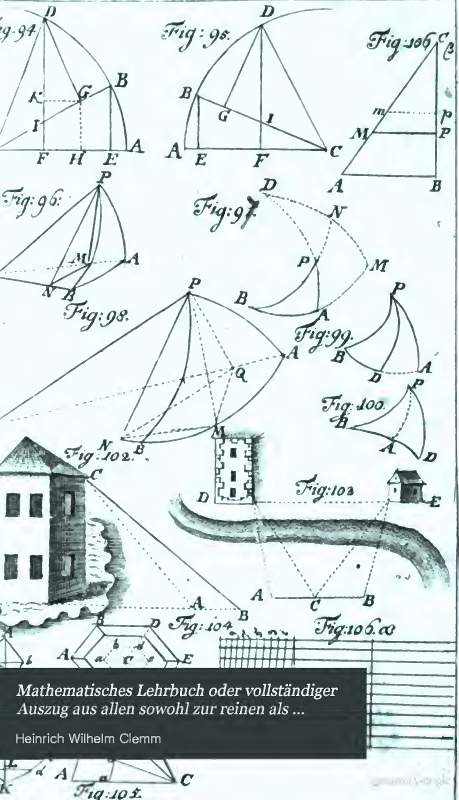


Mathematisches Lehrbuch oder vollständiger Auszug aus allen sowohl zur reinen als ...
Heinrich Wilhelm Clemm

Digitized by Google

Digitized by Google

Heinrich Wilhelm Clemms,

der heil. Schrift Doktors und öffentlichen Profeſſors der Theologie an der Univerſität Tübingen ꝛc.

mathematiſches Lehrbuch,

oder

vollſtändiger Auszug

aus allen

ſowohl zur reinen als angewandten Mathematik gehörigen Wiſſenſchaften,

nebſt einem Anhang

oder

kurzen Entwurf der Naturgeſchichte

I. Theil.

Mit Anmerkungen und Erläuterungen verſehen

von

Remigius Döttler

Prieſter der frommen Schulen.

Mit X. Kupfertafeln.

BIBLIOT. ACADEM. LAUSAN.
LIBERTÉ ET PATRIE

Wien,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiſerl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1786.

55

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorbericht.

„ Die mathematiſchen Wiſſenſchaften, in ſo
„ ferne ſie einem Menſchen, der eben nicht bloß
„ damit ſeinen Unterhalt ſucht, oder davon zu leben
„ gedenket, theils Vergnügen, theils Nutzen ſchaf-
„ fen ſollen, müſſen ohne Abbruch der Deutlichkeit
„ und Gründlichkeit, ſo viel möglich, in einer
„ angenehmen Kürze vorgetragen werden. Denn
„ man kann ihm, da er nach ſeinem Hauptzweck

„ noch ſo viel anders zu lernen hat, keine mathematiſchen Quartanten und Folianten in die Hände geben; giebt man ihm aber ein mageres Kompendium in die Hand, wo nur die vornehmſten Sätze ſtehen, bey deren Beweis man ihn auf gröſſere Bücher verweiſe, ſo bekömmt ſein Verſtand nichts Reelles zu denken, und er wird entweder die Künſte des Geometers mit den Unwiſſenden bewundern, oder wenn er klüger iſt, das Buch hinweg legen, bis er ein beſſer demonſtrirtes zu leſen bekömmt; wollte man ihm endlich gar ſolche ins kleine gebrachte Schriften, zu leſen geben, worinnen der tiefſinnige Meßkünſtler ſeine Beweiſe mit einer geheimnißvollen Dunkelheit umhüllet, und zwanzig Zwiſchenſätze und Formeln, die ihm wohl, aber den angehenden Lehrling nicht ſogleich einfallen, in ſeinen enthymematiſchen Schlüſſen ausläßt, auch was er ſagt durch eine ſteganographiſche Zauberſprache, dazu man den Schlüſſel erſt mühſam ſuchen muß, noch undeutlicher macht, ſo möchte dem Lehrling der Hallerische Gedanke dabey einfallen:

— — Das will ich nicht verſtehen,
Es müſſe ſich mein Feind mit ſolchen Büchern quälen!

„ Denn=

„ Demungeachtet ſcheinen die meiſten mathemati-
„ ſchen Handbücher unſerer Zeiten, unter eine der
„ angeführten drey Klaſſen zu gehören. Denn ent-
„ weder ſind ſie zu weitläuftig und allzugroß zum
„ Leſen; oder ſie ſind zu mager und zu wenig de-
„ monſtrirt; oder ſie ſind zwar demonſtrirt, aber
„ ſo, daß man dabey ſagen muß, was Keppler
„ von des Apollonius Schriften ſagte: Quis tolerat
„ laborem perlegendi iſta? Wenn alſo in ge-
„ genwärtigem Handbuch dieſe drey Fehler vermie-
„ den worden, ſo glaubt man, den übrigen in
„ Menge vorhandenen mathematiſchen Schriften
„ wenigſtens keinen Abbruch mit deſſen Ausgabe
„ zu thun, weil es von ganz anderer Art, und
„ weder zu groß, noch zu mager, noch in ſeinen
„ Demonſtrationen zu geheimnißvoll iſt; neben
„ dem darf man auch hoffen, daß dem verſtändi-
„ gen Publikum damit vielleicht mehr als mit an-
„ dern gedient ſey. Zu dem Ende muß man von
„ dem Werk ſelbſt Folgendes ſich bekannt machen.

„ Unter den mathematiſchen Kompendien iſt be-
„ kanntermaſſen das Wolfiſche am meiſten beliebt;
„ es iſt auch unter allen das Beſte, aber nur vor
„ fünfzig Jahren, geweſen. Denn wenn einer
„ es weis, ſo weis er, was man in der Mathe-

„ matik zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts
„ wußte; was inzwiſchen dazu gekommen, das bleibt
„ ihm verborgen, wenn ers nicht aus andern Schrif-
„ ten lernt. Es bliebe ihm aber, ein wichtiger
„ und bey nahe der ſchönſte Theil der Mathematik
„ verborgen, wenn ihm die Erfindungen unſers
„ Zeitalters verborgen blieben, die dem Wolfiſchen
„ Handbuch bey ſeinen ſo häuffigen und immer
„ neuen Auflagen doch nie einverleibt worden. In-
„ zwiſchen hat das Wolfiſche Handbuch, auſſer dem,
„ daß es in vorigen Zeiten das Beſte war, noch
„ jetzo einen Vorzug, wodurch es ſich immer er-
„ hält; und dieſer beſteht in ſeiner groſſen Deut-
„ lichkeit. Man hat daher, in gegenwärtiger
„ Schrift ſich, in Rückſicht auf die Deutlichkeit,
„ nach dieſem Handbuch gerichtet, und bey den
„ Lehrſätzen Satz und Beweis immer unterſchie-
„ den, auch alle Zwiſchenſätze nach der mathema-
„ tiſchen Syllogiſtik angeführt, und alſo in bey-
„ den Theilen, die Lehren der neuen Mathematik
„ auch den Anfängern gleichſam vorbuchſtabiret.
„ Auf dieſe Weiſe findet man nicht nur alles hier,
„ was die Hauptſachen betrift, die in dem Wol-
„ fiſchen Handbuch ſtehen; ſondern es iſt noch un-
„ gleich mehr, nämlich dasjenige dazu eingetragen,
„ was theils im gegenwärtigen Jahrhundert neu

„ er-

„ erfunden, theils in dem Euklideiſchen ſchon be=
„ kannt, und nachgehends in Vergeſſenheit gekom=
„ men war.

„ Die Beweiſe ſelbſt, beſonders die neuern, hat
„ man mit aller Deutlichkeit ſo ausführlich hinge=
„ ſetzt, als ein Anfänger ſolche wünſchen kann,
„ und alſo dem Mangel abzuhelfen geſucht, dar=
„ über man bey verſchiedenen gelehrten Kompendien
„ dießfalls klagt. Der Nervenſaft eines verſtändi=
„ gen Menſchen, iſt doch ungleich koſtbarer, als die
„ Buchdruckerſchwärze. Dieſe darf man eher ver=
„ ſprützen, als jenen, wenn man nicht eben bloß
„ für Gelehrte, ſondern auch für Anfänger ſchreibt;
„ doch hat man ſich auch gehütet, daß man keine
„ Ueberdeutlichkeit affektire, welche ſelbſt in Folian=
„ ten, und noch vielmehr in Kompendien unange-
„ nehm läßt. Bey derjenigen Methode, die man
„ alſo gebraucht, wird man, woferne noch einige
„ Leſer ſich der Undeutlichkeit wegen beſchweren
„ ſollten, den andern Halleriſchen Ausdruck anfüh=
„ ren können:

Sie ſind geſtraft genug, daß ſie es nicht verſtehn.

Vorbericht.

So weit Herr **Clemm** in der Vorrede zur erſten Auflage ſeines Lehrbuches. Statt des Schluſſes, in dem er von ſich ſelbſt ſprach, ſey es mir erlaubt, von **dieſer** Auflage ſeines Werkes ein Wort zu ſagen.

Sie iſt nicht ein bloſſer Nachdruck, wie man vielleicht aus der Gelegenheit, bey der ſie veranſtaltet ward, oder aus dem gröſſeren Theile der Geſellſchaft, in welcher ſie erſcheint, vermuthen könnte; daß ſie **mehr** ſey, wird jeder finden, der ſich die Mühe giebt, ſie mit der Beſten der Vorigen zu vergleichen. Sie iſt nicht nur von den häufigen Sprach- und Schreibfehlern, ſondern auch von manchen wirklichen Rechnungs- und wahrſcheinlicher Weiſe, von **allen** Druckfehlern gereiniget, die den Anfänger im Ueberrechnen aufhalten, oder überdrüßig machen könnten. **Erklärungen** ſind, wo ich ſie nöthig fand, beygeſetzt; öfters aber ſo in den Text des Autors eingeſchaltet, daß ſie nur bey der Vergleichung kennbar werden, ſo wie ich überhaupt meine **Zuſätze** und **Anmerkungen** nur durch Parentheſen und Abrücke unterſcheiden ließ, um die typographiſche Schönheit des Buches nicht zu verunſtalten. Oft ſind **Fol-**

ge-

geſätze beygerücket, auf die der Anfänger vielleicht nicht ſobald von ſelbſt verfallen wäre. Das **Bücherkenntniß**, auch hie und da die **Geſchichte** iſt erweitert; aber da die Bogenzahl nicht beträchtlich vermehrt werden durfte, ſo konnte ich nur die neueſten und vorzüglich guten Bücher nennen; wo ich es ohne Ungerechtigkeit gegen Auswärtige thun konnte, zog ich innländiſche Schriftſteller und Ausgaben vor. Die architektoniſchen Wiſſenſchaften blieben unberührt, weil man viel weitläuftigere Abhandlungen ſchreiben müßte, wenn man hierinn etwas Vollſtändigers liefern wollte. Herrn Clemms **einen** Wunſch über die Umarbeitung ſeines kurzen **Anhangs von der Naturgeſchichte**, den er in der Vorrede zu ſeiner zwoten Auflage äuſſerte, habe ich, ſo viel es ſeyn konnte, zu erfüllen getrachtet, man wird im zweyten Theile ſehen, was ich geleiſtet habe. Ueberhaupt ſuchte ich, das Buch für diejenigen **ganz** brauchbar zu machen, für die es beſtimmt iſt; und eben darum ſetze ich mich dem Vorwurfe aus, ſeinen zweyten Wunſch vernachläßiget zu haben. — Aber war er wohl überhaupt erfüllbar? — Mir wenigſtens ſcheint: Das Gebiet der Größenlehre, in dem die kleine Zahl un-

ſerer großen Mathematiker jetzt Entdeckungen macht, liege weit jenſeits der Gränzen dieſer Anfangsgründe.

Wien den 30 Jäner 1786.

Remigius Döttler
aus den frommen Schulen, Korrepetitor der Phyſik, Naturgeſchichte und Technologie, an der k. k. ſavoyiſch = thereſianiſchen Ritterakademie.

Digitized by Google

Inhalt
der
abgehandelten Materien.

Der arithmetiſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtück, von der Rechnung in Zahlen. Seite 3
Allgemeine Erklärungen. 3
Geſchichte der Zahlenrechnung 4
Allgemeiner Vortrag von den vier Rechnungsarten. 8
Das Ausſprechen und Schreiben der Zahlen. 12
Die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen. 14
Die Rechnung in Brüchen. 23
Von Dezimal- und Sexageſimalbrüchen. 31
Von den Potenzen. 38
Von Ausziehung der Quadratwurzel in Zahlen. 41
Von Ausziehung der Kubikwurzel in Zahlen. 45
Von den Verhältniſſen in Zahlen. 49
Zweytes Hauptſtück der arithmetiſchen Wiſſenſchaften, von der Buchſtabenrechnung. 51

Die

Die mit Sternchen bezeichneten Artikel können Anfänger übergehen.

Inhalt.

Seite.

Die Geſchichte der Buchſtabenrechnung. 51
Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchſtaben. 55
Die Buchſtabenrechnung in Brüchen. 66
Von den Potenzen oder Dignitäten und ihren Verände- rungen. 70
*Die Irrationalwurzeln und eingebildete oder unmögliche Größen. 81
Der binomiſche Lehrſatz. 81
*Die höchſte Unterſchiede oder Differenzen der Potenzen und die Natur der geraden und ungeraden Zahlen. 91
*Die Kombinationen. 93
Von den Proportionen. 99
*Von den arithmetiſchen Proportionen und Reihen. 100
Die geometriſchen Proportionen. 106
*Von den geometriſchen Progreſſionen oder Reihen. 113
Von den Logarithmen. 118
Von den Gleichungen. 122
*Von den quadratiſchen ſowohl reinen als unreinen Glei- chungen. 124
Von höhern Gleichungen überhaupt. 127
Von den Wurzeln der zuſammengeſetzten Gleichungen. 130
*Die Erfindung der Wurzeln und der Diviſoren einer Glei- chung. 133
*Die Veränderungen der Gleichungen. 135
*Die Beſtimmung der Koeffizienten bey Ausdrückungen durch unendliche Reihen. 137
Von unbeſtimmten Aufgaben. 142
Drittes Hauptſtück der arithmetiſchen Wiſſen- ſchaften, von der praktiſchen Rechenkunſt. 145
Geſchichte der praktiſchen Rechenkunſt. 145
Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen. 150
Von der Regel Detri, ſowohl directa als inverſa, der zuſammengeſetzten Regel Detri oder Regel Quinque, Geſellſchaftsrechnung, Kettenregel u. ſ. w. 153

Von

Inhalt.

Seite

Von höhern Aufgaben der praktiſchen Rechenkunſt, und beſonders auch vom Leibnitziſchen Interuſurio mit den Bilfingeriſchen Erläuterungen. 161

Der geometriſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtück, von der gemeinen oder Elementargeometrie. 177

Allgemeine Sätze von Linien, Winkeln und Figuren. 182

Die Verhältniß der Winkel gegen einander, nebſt den daraus flieſſenden Folgen 193

Die Verwandlung der Figuren. 204

Die Ausmeſſung geradelinigter Figuren. 213

Die Aehnlichkeit der Dreyecke und der Figuren überhaupt. 216

Von dem Zirkel, deſſen Verwandlung und Ausmeſſung. 226

Die Lage der Linien gegen die ebenen Flächen und der Flächen gegen einander. 242

Allgemeine Begriffe geometriſcher Körper, oder Einleitung in die Stereometrie. 248

Die Verwandlung der Körper. 251

Die Ausmeſſung der Körper. 255

Die Kugel oder Sphäre. 258

Die Kugelſchnitte. 262

Zweytes Hauptſtück, von der Trigonometrie. 267

Geſchichte der Trigonometrie. 267

Erſtes Kapitel, von der ebenen Trigonometrie. 270

Allgemeine Begriffe von Sinus, Koſinus, Tangenten, Sekanten und Koſekanten. 271

Allgemeine Theorie der trigonometriſchen Rechnung. 283

*Die Erfindung der Sinus von den Summen und Differenzen der Bögen, aus den gegebenen Sinuſſen und andern trigonometriſchen Linien. 292

Die Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreyecks, aus drey gegebenen Stücken, eine Seite mit darunter gerechnet. 300

*Anwendung der trigonometriſchen Lehrſätze auf die Polygone. 305

*Vo-

Inhalt.

Seite

Die Berechnung der Sinus und der Logarithme, nebſt dem Gebrauch der Tafeln. 308

Zweytes Kapitel, von der ſphäriſchen Trigonometrie. 314

Allgemeine Betrachtung der ſphäriſchen Dreyecke. 315

*Betrachtung und Aufloſung der rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecke. 317

*Betrachtung der Fälle, in welchen Winkel und Seiten gröſſer oder kleiner als 90 Grade werden. 321

*Betrachtung der ſchiefen Dreyecke. 323

*Betrachtung und Auflöſung der ſchiefen Dreyecke, in welchen drey Seiten oder drey Winkel gegeben ſind. 326

Drittes Hauptſtück, von der praktiſchen Geometrie. 335

Geſchichte der praktiſchen Geometrie. 336

Die Vergleichung der vornehmſten Maſſe. 338

Die Meſſung und Verjüngung der Linien und Figuren. 342

Die Meſſung und Verjüngung der Flächen, oder das Aufnehmen einer Gegend. 347

*Etwas von der Markſcheidekunſt. 348

Viertes Hauptſtück, von der höhern Geometrie. 351

Geſchichte der höhern Geometrie. 351

Allgemeine Begriffe von algebraiſchen und höhern Funktionen. 358

Die algebraiſchen Linien, beſonders die Kegelſchnitte, oder die Parabel, Ellipſe und Hyperbel. 360

Die Parabel. 363

Die Ellipſe. 366

Die Hyperbel. 373

Allgemeine Betrachtungen der koniſchen Sektionen und Linien der zweyten Ordnung. 381

*Von einigen andern, beſonders auch tranſcendentiſchen Linien. 387

*Die geometriſchen Oerter und die Konſtruktion der Gleichungen. 390

All-

Inhalt.

Seite

Allgemeine Gründe der Differentialrechnung. 393

Die Anwendung der Differentialrechnung, auf die vier Rechnungsarten, in poſitiven und negativen ganzen und gebrochen Zahlen, auch Wurzeln, Potenzen und zuſammengeſetzten Gröſſen. 396

*Allgemeiner Beweis des Newtoniſchen Binomii und des Harriotiſchen Lehrſatzes. 402

*Allgemeine Betrachtung der höhern Differentialien, und die Verwandlung der Gleichungen durch eben dieſe Mittel. 406

*Nik. Bernouilli Methode, alle mögliche Reihen, durch die ſich eine Gleichung auflöſen läßt, und die Geſtalt der Reihen, zu finden. 412

*Die Methode vom Kleinſten und Gröͤßten (Methodus de maximis & minimis.) 415

Von den Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien. 418

Allgemeine Regeln der Integralrechnung, auch in Rückſicht auf die Wiederherſtellung der beſtändigen Gröſſen. 425

*Einige ſchwerere Integralformeln für zuſammengeſetzte Differenzialien. 427

Von der Quadratur in krummen Linien. 432

*Die Rektifikazion der krummen Linien, beſonders auch der Neiliſchen Parabel. 435

*Newtons und Leibnizens Methoden, den Zirkel zu quadriren und zu rektifiziren, nebſt Diff. Formeln für den Zirkel. 440

Die umgekehrte Methode der Tangenten. (Methodus Tangentium inverſa). 443

*Die logarithmiſchen Differenzialien, und der Unterſchied der natürlichen oder hyperboliſchen, und der künſtlichen Logarithmen. 444

*Die Exponenzialrechnung nebſt einigen Integralformeln für logarithmiſche Differenzialien. 447

*Johann Bernoulli Vergleichung der Ausſchnitte des Zirkels und der Hyperbel. 449

*Einige

Inhalt.

Seite

*Einige andere Vergleichungen der Sinus, Koſinus, Tangenten, nach Johann Bernoulli Methode. 453

*Herrn Eulers und Clairaut Betrachtungen über die Differenziale der Funktionen, die zwo und mehr veränderliche Gröſſen enthalten. 456

**Die Lehre von der Evolution, Evoluten, und aus Evolution erzeugten Linien, den Krümmungszirkeln und Radiis (circulis curvaturæ, radiis oſculi.) 460

Die

arithmetiſchen Wiſſenſchaften,

oder

die Rechnung in Zahlen, die Buchſtaben-rechnung, und die praktiſche Rechenkunſt.

Der arithmetiſchen Wiſſenſchaften
Erſtes Hauptſtück.
Von der Rechnung in Zahlen.

Allgemeine Erklärungen.

§. 1.

Die Gröſſe, das iſt, was vermindert oder vermehret werden kann, läßt ſich von den übrigen Eigenſchaften einer Sache als abgeſondert betrachten; eine abgeſondert betrachtete Gröſſe iſt der Gegenſtand der Mathematik; ſie iſt alſo möglich und beſchäftigt ſich mit möglichen Dingen.

§. 2. Die Gröſſe kann man entweder als eine Menge von Theilen überhaupt anſehen, oder man kann die Verbindung und Ordnung ihrer Theile zugleich betrachten: in jenem Falle gehört ſie in die Arithmetik, in dieſem aber in die Geometrie. Folglich giebt es nicht mehr mathematiſche Wiſſenſchaften als dieſe zwo, worunter ſich alle übrigen bringen laſſen;

 wenn

Digitized by Google

wenn man aber ihre Lehren auf wirkliche Sachen anwendet, ſo wird man ſo viele Theile der angewandten Mathematik erfinden können, als verſchiedene Gattungen von Dingen in der Welt ſind. Ihre Anzahl läßt ſich alſo nicht beſtimmen, und erfindſame Köpfe werden ſie noch immer mit neuen Diſciplinen bereichern können.

§. 3. Die Arithmetik beſchäftigt ſich mit der Gröſſe, in ſofern ſie als ein Ganzes betrachtet wird, das aus Theilen beſtehet, die ſich vermindern und vermehren, und alleſammt zugleich genommen, für das Ganze, einzeln aber für einander ſetzen laſſen, ohne daß man auf die Verbindung und Ordnung dieſer Theile, wie in der Geometrie, zu ſehen nöthig hätte; die Möglichkeit dieſer Erklärung erhellt aus §. 1. Sie hat alſo ihre Richtigkeit.

§. 4. Die Rechenkunſt in Zahlen iſt von der Arithmetik überhaupt nur darinnen unterſchieden, daß die Größen durch die unter uns gewöhnlichen Zahlzeichen ausgedrückt werden; wovon wir in der folgenden kurzen Geſchichte der Rechenkunſt etwas ſagen werden.

Geſchichte der Zahlenrechnung.

§. 5. Das Rechnen war den Alten ungleich beſchwerlicher, als es heut zu Tag iſt. Man bediente ſich des Alphabets, deſſen erſter Buchſtabe eins, der anderte zwey u. ſ. w. zu bedeuten hatte, wie man es aus den hebräiſchen und griechiſchen Grammatiken weis. Die Lateiner machten aus ihrem Alphabeth eine Auswahl, und nahmen nur die Buchſtaben I, V, X, L, C, D, M, zu ihren Zahlzeichen. Einige wollen zwar das M nicht darunter zählen.

§. 6. So beſchwerlich nun dieſe Rechnung war, ſo hat doch ſchon vor zwey tauſend Jahren **Euclides** die Eigenſchaften der Zahlen oder die Theorie der Arithmetik in ſeinem ſiebenten, achten und neunten Element auf eine ſo demonſtrative

Weiſe

Weiſe vorgetragen, daß man den groſſen Geiſt der Alten, die uns vorgearbeitet haben, darinnen bewundern muß.

§. 7. **Anmerkung.** In verſchiedenen neuern Ausgaben des **Euclides** ſind zwar dieſe drey Elemente weggelaſſen; es iſt aber wo nicht ein Fehler, doch eine unzeitige Herablaſſung gegen die Anfänger, für welche man ſelbige zu ſchwer hielt; daher die meiſten Commentatores nur über die ſechs erſten Elemente geſchrieben haben. **Andreas Tacquet** hat ſich um die mathematiſche Wiſſenſchaften beſſer verdient gemacht, da er dieſe drey Elemente in ſeine Theoriam & praxin Arithmetices völlig eingerückt und erläutert hat. Wenn Anfänger gründlich geführt werden, ſo müſſen ſie von dem, was ſchwer ſcheinet, nicht zurückgehalten werden, oder lieber die Sache gar nicht lernen; es iſt allemal beſſer, etwas langſam aber recht, als geſchwind aber ſchlecht lernen. **Euclides** und **Archimedes** wollten ſelbſt den königlichen Prinzen keinen andern Weg zur Wahrheit bahnen. Aber eben darum wurden ihre Schüler ſo vollkommen gebildet. Die Neueren bilden durch ihr Nachgeben zwar viele, aber ſehr mittelmäßige Mathematiker, wenn anders dieſer Name nicht zu gut für ſie iſt.

§. 8. **Anmerkung.** Auſſer dem **Euclides** hat ſich unter den Alten keiner gleich verdient um die Arithmetik gemacht. **Nicomachus** ſchrieb dreyhundert Jahre vor Chriſti Geburt zwey Bücher der Arithmetik, welche im ſechsten Jahrhundert nach Chriſti Geburt Anit. Manl. Severinus Boethius in ſeiner Arithmetik gröſtentheils abgeſchrieben hat. Es ſind aber nichts, als Eintheilungen der Zahlen; und was man daraus lernen kann, iſt höchſtens dieſes, daß man von den logikaliſchen Definitionen und Diviſionen etwa einen Begriff bekömmt. Von dem **Pſellus**, einem griechiſchen Schriftſteller des zehenten Jahrhunderts, deſſen Arithmetik **Wilhelm Xylander** ins Lateiniſche 1556. überſetzt und erläutert hat, müſſen wir ein gleiches ſagen.

§. 9. Seitdem die ſogenannten arabiſchen Zahlzeichen, die heut zu Tag üblich ſind, in Europa bekannt wurden, hat die Rechenkunſt eine andere Geſtalt bekommen. Denn es iſt mit den Zahlzeichen, die wir haben, ungleich leichter zu rechnen, als mit den griechiſchen Buchſtaben.

§. 10. Die Erfindung dieſer Zahlzeichen ſchreibt man insgemein den Arabern oder überhaupt den Morgenländern zu,

und es iſt auch ſehr wahrſcheinlich, daß ſie von ihnen herkomme, weil die Europäer ſonſt alles von der Linken zur Rechten ſchreiben, bey den Zahlen aber allein eine Ausnahme machen, welche einen orientaliſchen Urſprung verräth. Die eigentliche Zeit der Erfindung ſelbſt läßt ſich nicht genau beſtimmen.

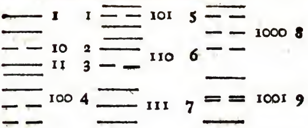
§. 11. Der allgemeine Nutzen dieſer Erfindung iſt ſo groß, daß ſie ſich von keiner andern Erfindung zu Rechnen bisher hat verdringen laſſen, und auch vielleicht in Zukunft nicht wird verdrungen werden. Denn man kann mit wenig Zahlzeichen eine ſo groſſe Summe ſchreiben, als man verlangt; und die Art der Verbindung, die wir im II. Hauptſtücke erklären, iſt ſo bequem und künſtlich, daß man ſchwerlich eine beſſere wird ausfindig machen können.

§. 12. Anmerk. Herr von Leibnitz hat, auſſer der Rechenmaſchine, die bey unſerer Rechnung mit Zahlen entbehrlich iſt, eine eben ſo entbehrliche Dyadik erfunden, welche aus 1 und 0 alle Zahlen zuſammen ſetzt, andere haben eine noch mehr entbehrliche Tetradik hinzugethan, die nur bis vier zählet, anſtatt daß unſere Rechnung bis zehen zählt. Die Leibnitzianiſche Dyadik hat den einzigen Vorzug, daß man multipliciren und dividiren kann, ohne das, Manchen ſo beſchwerliche, Einmal Eins zu lernen; hingegen muß man eine groſſe Zahl zu ſchreiben, z. E. nur eine Million, vier hundertmal 1 und 0 auf das Papier ſchreiben, durch welches langweilige Geſchäfte man billig abgeſchreckt wird, eine ſo bequeme Rechnung, die nur ſieben Zahlzeichen zu einer Million gebraucht, mit einer ſo weitläuftigen zu verwechſeln, wenn man auch ſchon das Einmal Eins dabey nicht lernen darf.

§. 13. Anmerk. Uebrigens hat Herr von Leibnitz durch ſeine Dyadik auch einige chineſiſche Charactere zu erläutern geſucht, in welchen gebrochene und ganze Linien vorkamen; und woron folgende Ordnung zur Erläuterung dient (*).

(*) Herr von Leibnitz that unſtreitig dem chineſiſchen Witze zu viele Ehre an, wenn er das Buch Y-king oder Yeking für ein Rechenbuch hält, und in ſelbem die Gründe ſeiner Dyadik findet; hingegen ſcheinet es Herr v. Pauw in ſeinen Recherches philoſophiques ſur les Egyptiens & les Chinois Section VIII. zu ſehr herabzuſetzen, wenn er ſelbes für nichts weiter als eine Loostafel hält, ob es gleich nicht ganz unmög-

möglich iſt, daß es dem Pöbel zu ſeinem Aberglauben Gelegenheit gegeben habe. Wie er hingegen dem Kum-Fu-Tsu, oder Confucius Schuld geben könne, daß er dieſe abergläubiſchen Looſe eingeführet, und Regeln für die Vergleichung der Lage der Stäbchen, die man in den Pagoden wirft, mit der Stellung der Linien des Yekings vorgeſchrieben habe, weis ich gar nicht. Konfucius ſchrieb zwar über den Yeking, aber er fand darinn **erſtens** die **Kosmogonie** der Chineſer ganz nach egyptiſchen Begriffen; **zweytens** die Geſchichte des Zuſtandes der alten noch rohen Chineſer bis zu ihrer Polizirung durch den **Fohi**, den man zum Urheber, wenigſtens zum Erweiterer dieſes Buches macht: und **Konfucius** der kaum vierhundert Jahre nach dem Fohi lebte, konnte doch leichter ſichere Nachrichten über die wahre Bedeutung der Symbolen dieſes Buches haben, als alle die ſich nachher an die Erklärung deſſelben wagten. (Sieh **Schubmachers** verborgne Alterthümer der Chineſer ꝛc. Wolfenbüttel. 1763. 8vo).



§. 14. **Anm.** Das Artigſte bey dieſer Dyadik iſt noch die Anwendung auf die Schöpfung aus Nichts, welche **Leibnitz** auf einer Gedächtnißmünze, worauf etliche Rechnungsproben nach der Dyadik geprägt waren, mit folgender Innſchrift erläutert hat:

Omnibus ex nihilo ducendis ſufficit unum.

Soll ich übrigens von den neueſten Rechenbüchern, die in Menge vorhanden ſind, noch etwas ſagen, ſo verdient **Ludwig Wenzen** demonſtrativiſche Einleitung zur Rechenkunſt unter allen den Vorzug. (Hiezu iſt auch **Clausbergs** De-

monſtrative Rechenkunſt; und für Anfänger im Praktiſchen Hrn. Koch's vollſtändiges Rechenbuch, die Rechenkunſt ohne mündlicher Anweiſung zu lernen. Dresden 1780. zu zählen).

Allgemeiner Vortrag von den vier Rechnungsarten.

§. 15. Erklärungen. Solche Dinge, welche man in Rückſicht bloß auf das, was ſie miteinander gemein haben, betrachtet, und in ſofern für Einerley halten kann, ſind Dinge von einerley Art; z. E. ein Engländer, ein Däne und ein Deutſcher haben das miteinander gemein, daß ſie Europäer ſind; und in ſofern kann ich ſie zuſammen zählen; dann es ſind weder drey Engländer, noch drey Dänen, noch drey Deutſche, aber drey Europäer ſind ſie. Und dieſer gemeinſchäftliche Charakter heißt die Einheit; eine Menge von ſolchen Einheiten aber eine Zahl.

§. 16. Lehrſatz. Eine Zahl wird entweder vermindert oder vermehrt; wenn ſie vermehrt wird, ſo kommen mehr Zahlen hinzu; dieſe Zahlen ſind nun der gegebenen Zahl gleich, oder nicht gleich; iſt das letztere, ſo heißt die Rechnungsart eine Addition; iſt aber das erſtere, ſo heißt ſie eine Multiplikation. Eben ſo wenn ſie vermindert wird, ſo kommen Zahlen von ihr hinweg; die hinweggenommene Zahl wird nun überhaupt entweder einmal weggenommen, oder ſie wird ſo oft hinweggenommen, als es möglich iſt; iſt jenes, ſo heißt die Rechnungsart die Subtraktion; iſt dieſes, ſo heißt ſie Diviſion.

§. 17. Erklärungen. Addiren heißt alſo eine Zahl finden, die verſchiedenen andern gegebenen Zahlen zuſammen genommen gleich iſt; dieſe gefundene Zahl wird die Summe genannt, die gegebenen heiſſen die ſummirenden. Multipliziren heißt eine Zahl etlichemal zu ſich ſelbſt addiren; was durch dieſe Addition herauskömmt, nennt man das Produkt; und die beyden Zahlen, davon die eine zu wieder-

hol-

holtenmalen wirklich addirt wird, die andere aber anzeigt, wie oft die erſte zu ſich ſelbſt addirt werden ſoll, heiſſen die **Faktoren**.

§. 18. **Zuſatz**. Der eine Faktor iſt demnach in dem Produkte ſo vielmal enthalten, als die Einheit in dem andern Faktor enthalten iſt; und es iſt gleichgültig, welcher Faktor zuerſt geſetzt wird, dann ihr Produkt wird auch bey veränderter Ordnung immer einerley ſeyn.

§. 19. **Erklärungen. Subtrahiren** heißt von einer gegebenen Zahl eine andere nach Belieben wegnehmen; was übrig bleibt, nennt man die **Differenz**, oder den **Unterſchied**. Dahero die Differenz und die ſubtrahirte Zahl (Subtrahendus) zuſammengenommen, der erſten Zahl gleich ſind, von welcher man ſubtrahirt hat (dem numero minuendo). **Dividiren** hingegen heißt eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen Zahl ſo oft abziehen, als es möglich iſt, das iſt, bis nichts mehr übrig bleibt, oder die übrig gebliebene Gröſſe ſo klein wird, daß ſie für nichts zu achten iſt. Die Zahl, welche dividirt wird, heißt der **Dividendus**, die Zahl, womit man dividirt, der **Diviſor**, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Diviſor ſich vom Dividendus habe abziehen laſſen, der **Quotient**.

§. 20. **Zuſatz**. Der Diviſor muß alſo in dem Dividendus ſo oft enthalten ſeyn, als die Einheit im Quotienten; oder, wenn der Diviſor gröſſer iſt, ſo iſt der Dividendus im Diviſor ſo vielmal enthalten, als der Quotient in der Einheit.

§. 21. **Zuſatz**. Das Produkt des Diviſors in den Quotienten giebt den Dividendus; und das Produkt durch einen Faktor dividirt, giebt den andern Faktor.

§. 22. **Erklärungen. Gleiche** Dinge ſind, welche einerley Gröſſe haben; **ähnliche** Dinge, bey welchen alles einerley iſt, ausgenommen die Gröſſe; gleiche und ähnliche Dinge heißt man **kongruent**.

§. 23. **Grundſaͤtze.** Das Ganze iſt ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich, folglich groͤſſer als ein jeder einzelne Theil. Jede Groͤße iſt ſich ſelbſt gleich. Die folgenden wollen wir beſonders auszeichnen. I. Wenn zwo Groͤßen einer dritten gleich ſind, ſo ſind ſie einander ſelbſt gleich. II. Was aber groͤßer oder kleiner iſt, als eine von zwo gleichen Groͤſſen, das iſt auch groͤßer oder kleiner als die andere. III. Gleiches zu Gleichem addirt, oder von Gleichem ſubtrahirt, oder mit Gleichem multiplizirt und dividirt, giebt gleiche Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten; ſie werden aber ungleich, wenn man Ungleiches addirt, oder ſubtrahirt, oder damit multiplizirt und dividirt. IV. Das Groͤßere zum Gleichen addirt oder damit multiplizirt, giebt mehr als das Kleinere, weniger aber, wenn man es ſubtrahirt oder damit dividirt.

§. 24. **Willkuͤhrliche Saͤtze.** Die Zeichen der arithmetiſchen Operationen ſind folgende:

$+$	Zeich. der Addition;	$=$	Zeich. der Gleichheit;	∞	Zeich. des Unendlichgroſſen;
$-$	der Subtraktion;	$\backsim$	der Aehnlekeit;	0	was keine Groͤſſe hat, oder unendlich klein iſt;
$\cdot$	der Multiplikation;	$\cong$	der Kongruenz;		
		$<$	deſſen was groͤſſer iſt;		
$:$	der Diviſion;			$\surd$	das Wurzelzeichen.
		$>$	deſſen was kleiner iſt;		

§. 25. **Anmerk.** Damit die obigen Grundſaͤtze, welche in alle mathematiſche Wiſſenſchaften ihren beſtaͤndigen Einfluß haben, als allgemeine, leichte und jedermann faßliche Saͤtze deſto beſſer erkannt werden, ſo wollen wir ſie mit Exempeln erlaͤutern, die den Gebrauch der Zeichen zugleich beſtimmen koͤnnen.

Exempel zu Nr. I. §. 23.

$$\begin{array}{r} 5+10=15 \\ 12+3=15 \\ \hline 12+3=5+10 \end{array}$$

Nr. II.

$$\begin{array}{r} 5+10=15 \\ 20>15 \\ \hline 20>5+10 \end{array}$$

Nr. III.

Nr. III.

$$\begin{array}{ll} 6=4+2 & 6=4+2 \\ 3=3 & 3=3 \\ \hline 6+3=(4+2)+3 & 6.3=(4+2).3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 6=4+2 & 6=4+2 \\ 3=3 & 3=3 \\ \hline 6-3=(4+2)-3 & 6:3=(4+2):3 \end{array}$$

Nr. IV.

$$\begin{array}{ll} 10=8+2 & 10=8+2 \\ 5>3 & 5>3 \\ \hline 10+5>(8+2)+3 & 10.5>(8+2).3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 10=8+2 & 10=8+2 \\ 5>3 & 5>3 \\ \hline 10-5<(8+2)-3 & 10:5<(8+2):3 \end{array}$$

Durch dieſe Exempel werden alle gegebene Grundſätze erläutert, und von dem Geheimnißvollen, daß ſie an ſich zu haben ſcheinen, befreyet ſeyn. Was die Zeichen betrift, ſo merken wir noch an, daß eine zuſammengeſetzte Gröſſe, wenn ſie durch eine andere dividirt oder multiplizirt wird, u. ſ. w. oder wenn beyde zuſammengeſetzt ſind, in ( ) eingeſchloſſen werden; z. E. $(5+7) . (3+6)$ oder $(9+2) : (4-1)$; bey der Multiplikation kann das Zeichen auch in dieſem Falle wegbleiben, z. E. $(4+1)\ (5+9)$, wie es bey der Multiplikation der Buchſtaben allemal wegbleibt, z. Ex. $a . b = ab$; wie weiter unten gezeigt werden ſoll. Sonſt iſt auch das ſogenannte Andreaskreuz das Zeichen der Multiplikation; z. E. $5 \times 10 = 50$. Die Diviſion zeigt man auch durch einen Querſtrich zwiſchen dem Dividendus und Diviſor an. Z. E. $\frac{3}{5}$, $\frac{(6+4)}{(3+2)}$; von den Wurzeln und Potenzen reden wir im Folgenden; vorläufig ſetzen wir doch einen Ausdruck ſtatt eines Exempels bey. Dann weil $6 . 6 = 36$, ſo heißt 6 die Quadratwurzel aus 36, und wird geſchrieben $\sqrt{36}$, oder $6=\sqrt{36}$; und dieſe Wurzel iſt allemal die Quadratwurzel, wenn nichts in der Oeffnung des Zeichens ſtehet; ſoll es aber eine andere Wurzel ſeyn, ſo muß man in die Oeffnung hineinſchreiben, die wievielte man verlange, z. E. $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{64}$, oder überhaupt $\sqrt[n]{100}$, die $n$te Wurzel aus hundert.

Das

Das Ausſprechen und Schreiben der Zahlen.

§. 27. **Willkühr. Satz.** Man zählet von eins bis zehen, ſo daß man den neun erſten Einheiten beſondere Zeichen giebt, die Zahl zehen aber durch die Verbindung von 1 und 0 ausdrücket. Daß dieſer Satz willkührlich ſey, erhellet daher, weil man nicht genöthigt iſt, mit einfachen Zeichen gerade ſo weit zu zählen; man könnte eher noch aufhören, etwa ſchon bey zwey, wie die Leibnitzianiſche Dyadik es weiſet. Inzwiſchen hat dieſe übliche Rechnungsart ihre groſſen Vortheile, davon wir §. 9. etwas geſagt haben. Die dabey üblichen bekannten Zeichen ſind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und die 0 (Nulle), welche durch Verbindung mit 1 zehen, mit 2 zwanzig u. ſ. w. nämlich allemal zehenmal ſo viel als die einfache Zahl giebt.

Anmerk. Man hätte ſtatt der 0 auch ein anderes Zeichen, z. E. ein Sternlein * oder ſo was gebrauchen können; denn das Zeichen der 0 iſt hier keine Nulle, wie man ſonſt die Nullen nimmt, ſondern eine bloſſe Anzeige, daß die Einheit um eine Stelle weiter vor ſich gerückt worden ſey.

§. 28. **Lehnſatz.** Neun Zeichen laſſen ſich nicht weiter als neunmal neun, oder 81mal ſetzen und kombiniren, wenn je zwey und zwey kombinirt werden; wie in der Lehre der Kombinationen gezeigt werden ſoll; folglich kann man mit den gewöhnlichen 9 Zahlzeichen Hundert nicht anders ſchreiben, als durch eine dreyfache Verbindung; denn 81mal werden die neun Einheiten miteinander, neunmal mit der 0 kombinirt, das giebt neunzig; dazu kommen noch die neun einzelne Einheiten, das macht 99; folglich muß bey der Zahl Hundert die dreyfache Kombination anfangen.

§. 29. **Zuſatz.** Eben ſo kann man beweiſen, daß bey Tauſend die vierfache, bey Zehentauſend die fünffache Kombination u. ſ. w. anfangen muß.

§. 30. **Willkührl. Satz.** Die neun einfachen Zahlzeichen haben ihre eigenen Namen. Das erſte zuſammengeſetzte Zahlzeichen, nämlich 10 hat ebenfalls einen beſondern Na-

men, und heißt Zehen; die folgenden bekommen ihre Benennungen aus den Namen der einfachen, und erſten zuſammengeſetzten Zahl; z. E. ſiebenzehen, achtzehen, dreyßig, vierzig u. ſ. w. Zehenmal zehen wird Hundert genannt; zehenmal hundert heißt Tauſend, u. ſ. w. Endlich um aller Verwirrung bey den zu oft wiederholten Tönen vorzubeugen, nennt man tauſendmal Tauſend eine Million, millionmal Million eine Billion, millionmal Billion eine Trillion u. ſ. w.

§. 31. **Willkührl. Sätze.** In der erſten Stelle zur Rechten ſtehen die Einheiten, in der zweyten gegen die Linke die Zehner, in der dritten die Hunderter, in der vierten die Tauſender u. ſ. w. Die Nullen dienen die leeren Plätze auszufüllen, wenn z. E. kein Zehner, kein Hunderter, aber ein Tauſender u. ſ. w. vorhanden iſt. Es wird daher leicht ſeyn, eine Zahl auszuſprechen, wenn man ſie hinter ſich lieſt, oder will man ſie von vorne leſen, ſo muß man, wofern die Zahl groß iſt, weil man nicht leicht über 3 oder 6 Zahlen auf einmal ſchnell überſchauen kann, von 3 zu 3, oder wenigſtens von 6 zu 6 Zahlen Zeichen machen, welche Strichlein oder Punkten ſeyn können, wodurch man die Klaſſen und den Werth der Zahlen, das iſt, die Stellen der Tauſender und der Millionen anzeigt.

§. 32. **Anmerk.** Nun wird ſich eine jede Zahl leicht ausſprechen laſſen. Z. E. 4'568,423 ſind, wenn man ſie hinter ſich lieſt, 3 Einheiten, 2 Zehner, 4 Hunderter, 8 Tauſender, 6 Zehentauſender, 5 Hunderttauſender, 4 Tauſendmaltauſender, oder 4 Millionen; von vorne aber, durch Hilfe der Strichlein, wo die Tauſender und Millionen anfangen; vier Millionen, Fünfhundert und Acht und ſechzig Tauſend, Vierhundert und Drey und Zwanzig. Eben ſo läßt ſich eine Zahl mit Nullen vermengt ausſprechen. Z. E. 302'004.603 ſind 3 Einheiten, kein Zehner, 6 Hunderter, 4 Tauſender, kein Zehntauſender, kein Hunderttauſender, 2 Millionen, kein Zehner von Millionen, 3 Hunderter von Millionen; wenn man hinter ſich lieſt; von vorne aber, durch Hilfe der Strichlein, Dreyhundert und zwo Millionen, Viertauſend Sechshundert und Drey.

§. 33. Anmerk. Die deutſche Sprache hat etwas Beſonders und dabey ſehr Unſchickliches vor den meiſten andern Sprachen, daß ſie gemeiniglich die kleinere Zahl vor der größern im Ausſprechen ſetzt, und z. E. drey und zwanzig ſtatt zwanzig drey, fünf und neunzig ſtatt neunzig fünf u. ſ. w. ſagt. Man iſt es aber einmal ſo gewohnt, und muß alſo der dabey zu beſorgenden Verwirrung durch deſto größere Aufmerkſamkeit zu begegnen ſuchen. Doch giebt es auch Gelehrte, welche die natürliche Ordnung der eingewurzelten Gewohnheit vorziehen, und ſchlechterdings, fünfzig vier, ſechzig drey, ſtatt vier und fünfzig und drey und ſechzig ausſprechen. In Rechnungen mit genannten Zahlen, in Kapitalbriefen und Schuldverſchreibungen findet man dieſe letztere Art ſich auszudrücken nicht ſelten, wenn man nämlich die Zahlen ganz ausſchreibet, und nicht nur mit den ſogenannten arabiſchen Zahlzeichen anzeigt.

Die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 34. **Lehrſ.** Verſchiedene Zahlen werden addirt, wenn man von der Rechten zur Linken die Zahlen ſo untereinander ſchreibt, daß Einheiten unter die Einheiten, Zehner unter die Zehner, Hunderter unter die Hunderter u. ſ. w. zu ſtehen kommen, worauf man jede Reihe, nämlich die Reihe der Einheiten, der Zehner, der Hunderter u. ſ. w. zuſammen zählt, und hernach entweder die einzelne Summen wieder addirt, oder wenn man eine Fertigkeit im Zuſammenzählen beſitzt, ſie gleich bey dem erſten Addiren ſo zuſammenzählt, daß Einheiten, Zehner, Hunderter ihre rechte Stelle bekommen, wenn ſie etwa für eine der folgenden Reihen im Sinn aufbehalten werden müßten. Wenn man nun keinen Fehler begeht, ſo wird die Summe den gegebenen Zahlen vollkommen gleich ſeyn, weil das Ganze ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich iſt.

§. 35.

§. 35. Anmerk. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern. Es ſeyen folgende Zahlen gegeben.

```
678345
  5321
  4894
------
    10
   15
  14
 17
67
------
688560
```

So ſagt man: 4 und 1 und 5 geben 10; die man hinter den Strich ſetzt; wiederum 9 und 2 und 4 geben 15 (Zehner); die man unter den Zehnern von der Rechten zur Linken ſchreibt; ferner 8 und 3 und 3 geben 14 (Hunderter), in ihre Reihe geſetzt; und 4 und 5 und 8 geben 17 (Tauſender); und noch 67 Zehentauſender ſind 67 Zehentauſender; dieſe Partialſummen addirt man wiederum, und ſagt o iſt o, 5 und 1 iſt ſechs, 4 und 1 iſt 5, 7 und 1 iſt 8, 7 und 1 iſt 8, 6 iſt 6; da dann die untere Zahl heraus kömmt. Wenn aber dieſe Methode zu langweilig ſcheint, wie ſie es in der That iſt, ſo muß man nur ſo viel Fertigkeit bekommen, daß man im Stand iſt, Zahlen im Kopf zu behalten; da dann das Exempel alſo gemacht wird:

```
678345
  5321
  4894
------
688560
```

4 und 1 und 5 geben 10, ſetze o, behalte 1, (einen Zehner in die folgende Klaſſe) 9 und 2 und 4 geben 15, und 1 behalten geben 16, ſetze 6, behalte 1, (einen Hunderter in die folgende Klaſſe); 8 und 3 und 3 geben 14, und 1 behalten geben 15 Hunderter; ſetze 5, behalte 1 (einen Tauſender in die folgende Klaſſe); 4 und 5 und 8 geben 17 und 1 behalten, geben 18; ſetze 8, behalte 1, (einen Zehntauſender in die folgende Klaſſe); 7 und 1 behalten geben 8 Zehentauſender, ſetze 8; 6 (Hunderttauſender) ſind 6 (Hunderttauſender), ſetze 6. In dieſem Falle wird die obige Summe ſchneller und eben ſo richtig herauskommen, wie die Operation es zeiget, wenn man nur eine Fertigkeit im Zuſammenzählen erlangt hat.

§. 36. Anmerk. Man hat bey dem Addiren eine ſogenannte Neunerprobe, nach welcher man in den ſummirenden Zahlen ſo oft 9 hinwegwirft, als in der Summe, wobey man aber auch diejenige Neuner mit einrechnen muß, die man bey dem Summiren hinweggeworfen hat; wenn beyderſeits gleiches übrig bleibt, ſo hat man recht gerechnet. Denn ſonſt, wenn man nur die Neuner aus der Summe und in den ſummirenden Zahlen wegwirft, ohne auf diejenige zu ſehen, die man bey der Addition ſelbſt weggeworfen hat, würde, wenn man gerad allemal um 9 fehlet, die Probe richtig, und doch das Exempel falſch gerechnet ſeyn. Z. E. Es iſt grundfalſch, daß 548 + 572 = 2029; und doch hält das Exempel die Neunerprobe; wenn man bloß die Neuner in der Summe und in den ſummirenden Zahlen wegwirft; der Fehler

aber

aber wird entdeckt, wenn man auf die bey der wirklichen Addition hinweggeworfene Neuner Achtung giebt.

§. 37. Anmerk. Die Addition muß zuweilen dem Ausſprechen der Zahlen zu Hilfe kommen, beſonders bey den ſogenannten Vexieraufgaben; wenn man z. E. eilf tauſend eilf hundert und eilf einem zu ſchreiben aufgiebt, ſo muß er einzelne Zahlen ſetzen, und ſodann addiren, da dann die Summe iſt 12111. Die Sache ſelbſt iſt übrigens von gar keiner Wichtigkeit.

§. 38. Lehrſatz. Eine kleine Zahl wird von einer gröſſern abgezogen, wenn man die Zahlen ſo untereinander ſchreibt, daß Einheiten auf Einheiten, Zehner auf Zehner, Hunderter auf Hunderter, oder wenigſtens auf ihre Stellen, wenn Nullen da ſind, zu ſtehen kommen; da man dann von der Rechten zur Linken die Einheiten, Zehner u. ſ. w. ſubtrahirt, bis alles abgezogen iſt, was man verlangt. Wenn alle Zahlzeichen der obern Reihe gröſſer ſind, als der untern, ſo iſt die Sache vor ſich klar genug. Wenn aber einige Zahlzeichen der obern Zahl kleiner als der untern ſind, oder wenn gar Nullen vorhanden wären, ſo entlehnt man von den höhern Stellen zur Linken eine Einheit der Zehner, oder der Hunderter, oder der Tauſender u. ſ. w., welche in der nächſt niedern Stelle allemal das Zehenfache ſeyn wird, weil eine Einheit der Hunderter zehen Zehner, eine Einheit der Tauſender zehen Hunderter u. ſ. w. giebt. In wechem Falle man allemal wird ſubtrahiren können. Was endlich die Nullen betrift, ſo iſt es entweder eine, oder es ſind mehrere hintereinander, iſt es eine einzige, ſo wird durch das Entlehnen 10 daraus, weil $10 + 0 = 10$; davon man allemal die untere Zahl abziehen kann; ſtehen aber mehrere hintereinander, ſo geht man ſo weit zur Linken, bis man ein Zahlzeichen findet, ſollte es auch in der Millionen Stelle, von der Einheit an gerechnet, ſeyn, davon man entlehnen kann, da dann die dazwiſchen liegende Nullen zu Nenner werden, weil z. E. $1000 - 1 = 999$ und $2000 - 1 = 1999$ oder $3000 - 2 = 2998$ u. ſ. w. Denn wenn die letzte Nulle in 10 verwandelt wird, ſo müſſen alle

alle vorhergehende in 9 verwandelt werden, wie die bey den Zahlen angenommene Kombinationslehre zeiget; z. E. 2000 = 1990 + 10.

§. 39. **Anmerkung.** Exempel machen die Sache deutlich; wir ſetzen fünf Fälle. Der I. iſt, wenn alle untere Zahlen kleiner als die obere ſind;

3648 2125 ——— 1523	Da heißt es: 5 von 8 läßt 3 (Einheiten), 2 von 4 läßt 2 (Zehner), 1 von 6 läßt 5 (Hunderter), 2 von 3 läßt 1 (Tauſender). Die Differenz iſt alſo 1523.

II. Fall, wenn die untere Zahl theils kleiner, theils gleich groß ſind mit den obern, und noch über das die untere Reihe weniger Zahlzeichen hat;

5482 472 ——— 5010	Da es heißt: 2 von 2 geht auf, läßt keine Einheit, alſo ſetzt man eine Nulle in die Stelle der Einheit; 7 von 8 läßt 1 (Zehner), 4 von 4 läßt keinen Hunderter, alſo ſetzt man eine 0 in die Stelle der Hunderter; nichts von 5 läßt 5 (Tauſender); denn es iſt eben ſo viel, als ob unter dem 5 eine Nulle ſtünde.

III. Fall, wenn in der untern Zahl einige größere Zahlzeichen ſich befinden als in der obern, da man dann von den höhern Stellen entlehnt;

6 5 . 3 . 2 2 4 9 ——— 6 2 8 3	z. E. 9 von 2 läßt ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der Zehner eine Einheit, die hernach 10 Einheiten giebt; 10 + 2 machen 12, davon läßt ſich 9 abziehen, und der Reſt iſt 3, ferner 4 von 2, weil der Dreyer eine

Einheit verlohren hat, läßt ſich wieder nicht abziehen, man entlehnt dahero von 5 aus der Stelle der Hunderter eine Einheit, die zehen Zehner giebt, 10 + 2 giebt 12, davon läßt ſich 4 abziehen, und der Reſt iſt 8; 2 von 4, weil 5 eines verlohren hat, läßt 2; nichts von 6 läßt 6. Dahero die Differenz richtig gefunden iſt.

IV. Fall, wenn Nullen theils oben, theils unten vorhanden ſind.

6 0 4 . 0 2 5 0 0 6 1 ——— 1 0 3 4 1	1 von 2 läßt 1, 6 von 0 geht nicht an, man entlehnt eins, ſo wird die Nulle zehen; 6 von 10 läßt 4; 0 von 3 läßt 3; 0 von 0 läßt 0, 5 von 6 läßt 1.

V. Fall, wenn oben mehrere Nullen nach einander vorhanden ſind.

```
7.0.0.2.0.0.4
1003025
-------
5998979
```

5 von 4 läßt ſich nicht ſubtrahiren, und weil nächſt vorher Nullen ſtehen, ſo entlehnt man aus der Stelle der Tauſender eine Einheit, durch welches Entlehnen die zwo Nullen zu Neuner werden, weil von der letztern, die eigentlich 10 worden, auch eine Einheit zu den 4 hinweg kömmt; nun kann man entlehnen; 5 von 14 läßt 9; 2 von 9 läßt 7, 0 von 9 läßt 9; 3 von 1 geht nicht an, man entlehnt alſo aus der Stelle der Millionen, und ſagt 3 von 11 läßt 8, 0 von 9 läßt 9, 0 von 9 läßt 9, 1 von 6 läßt 5.

§. 40. **Anmerk.** Man hat noch eine Methode bey dem Entlehnen, die aber ohne Noth gekünſtelt und weitläuftiger als dieſe iſt, wenn man nämlich des Subtrahendi folgende Stelle mit einem Punkt bezeichnet, dadurch ſie um eine Einheit vermehrt wird. Z. E.

```
548
2.6.9
-----
279
```

9 von 18 läßt 9, 7 von 14 läßt 7, 3 von 5 läßt 2; dieſe widerſinniſche Art zu ſubtrahiren iſt zwar richtig; denn es kömmt eben ſo viel heraus, als wenn man ſagt, 9 von 18 läßt 9, 6 von 13 läßt 7, 2 von 4 läßt 2; aber ſie iſt nicht in der Natur der Subtraktion und des Werths der Zahlzeichen gegründet; indem die unteren Zahlen niemals wirklich vermehrt werden, wenn man oben etwas entlehnt.

§. 41. **Zuſatz.** Wenn man die Differenz und die ſubtrahirte Zahl wiederum zuſammen addirt, ſo kömmt die zu vermindernde Zahl (numerus minuendus) wieder heraus: denn wenn man von einem Ganzen was hinwegnimmt, und addirt das Hinweggenommene wieder zu dem verminderten Ganzen, ſo muß das vorige Ganze wieder herauskommen. Dieß heißt man auch die Probe der Subtraktion. Eben ſo erhellt, daß, wenn man von der Summe einige Reihen der ſummirenden Zahlen ſubtrahirt, die übrigen ſummirenden Zahlen die Differenz geben. Auf dieſe Weiſe dienen die Addition und Subtraktion einander wechſelweiſe zur Probe.

§. 42. **Lehrſatz.** Alle Produkte der neun einfachen Zahlen laſſen ſich finden, wenn man die neun Zahlzeichen in einer Horizontalreihe ſchreibt, und in den Vertikalreihen herabwärts eine jede neunmal nach einander zu ſich ſelbſt addirt,

da

da dann die von beyden Seiten gezogene Parallelen die Produkte richtig zeigen werden. Z. E. 3 mal 4 weiſt im Parallelogramm auf 12, 8 mal 7 auf 56, u. ſ. w.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 43. **Zuſatz.** Iſt einer von den Faktoren ein Zehner, Hunderter, oder überhaupt von höherer Ordnung, ſo darf man nur das Produkt mit der höhern Ordnung multipliziren; z. E. 300.6 = 3.6.100 = 18.100 = 1800; eben ſo macht mans, wenn beyde Faktoren höherer Ordnung ſind: z. E. 300.40 = 3.4.100.10 = 12.100.10 = 12000. Folglich kann man das angegebene Rechentäfelein für alle Zahlen gebrauchen, man heißt es ſonſt das **Einmal Eins, (auch die pythagoriſche Tafel).**

§. 44. **Lehrſatz.** Zwo Zahlen werden mit einander multiplizirt, wenn man die Einheiten, Zehner, Hunderter u. ſ. w. des einen Faktors mit den Einheiten, Zehnern, Hundertern u. ſ. w. des andern multiplizirt, und die Partialprodukte addirt, da dann die Summe dem ganzen Produkt gleich ſeyn muß, weil das Ganze ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich iſt.

§. 45. **Anmerk.** Die Sache wird durch ein Exempel deutlich werden; es giebt zween Fälle; der erſte iſt, wenn der eine Faktor nur ein Zahlzeichen hat: der andere, wenn beyde mehrere Zahlzeichen haben. Ein Exempel des erſten Falls iſt das folgende:

```
 3428
    6
-----
   48
  12
 24
18
-----
20568

 3428
    6
-----
20568

   3452
    346
-------
  20712
 13808
10356
-------
1194392
```

6 . 8 ſind 48 (Einheiten) 6 . 2 ſind 12 (Zehner) 6 . 4 ſind 24 (Hunderter) u. ſ. w. Dieſe Partialprodukte, in ihre Stelle geſetzt, geben durch die Addition die untere Summe, 20568. Das Exempel wird aber kürzer gerechnet, wenn man die Zehner, Hunderter u. ſ. w. im Sinn, wie in der Addition behält; da es dann heißt: 6 . 8 ſind 48, ſetze 8, behalte 4, 6 mal 2 ſind 12, und 4 behalten ſind 16, ſetze 6, behalte 1 (Hunderter); 6 mal 4 ſind 24. und 1 behalten ſind 25, ſetze 5, behalte 2 (Tauſender), 6 mal 3 ſind 18 und 2 behalten ſind 20 (Tauſender); wie beygeſetztes Exempel in Zahlen zeiget; und dadurch wird der II. Fall deſto leichter: wenn nämlich beyde Faktoren mehrere Ziffer haben, z. E. 6.2 ſind 12, ſetze 2, behalte 1, 6.5 ſind 30 und 1 behalten ſind 31, ſetze 1, behalte 3 u. ſ. w. hernach multiplizirt man mit dem Faktor der Zehner, 40.2 ſind 80, oder 8 Zehner, in die Stelle der Zehner geſetzt, da die Nulle wegbleiben kann, u. ſ. w. endlich mit dem Faktor der Hunderter, 300.2 = 600, oder 6 in die Stelle der Hunderter geſetzt, da dann wieder beyde Nullen wegbleiben können; die Partialprodukte addirt man, ſo iſt die Summe das ganze Produkt.

§. 46. **Anmerk.** Wenn ein Faktor am Ende Nullen hat, ſo wird nur mit den Zahlzeichen multiplizirt, z. E. 423 . 200 = 423 . 2 . 100 = 846 . 100 = 84600, und die Nullen werden nach geſchehener Multiplikation angehängt: und wenn ein Faktor in der Mitte Nullen hat, ſo wird die nächſtfolgende Reihe um ſo viel Stellen weiter hinausgerückt, als Nullen in einem fort ſtehen; weil man ſonſt eine Reihe Nullen ohne Noth ſchreiben müßte; der Grund von dieſer Abkürzung der Rechnung erhellet aus §.43.

```
   4235        52832
    302         2006
-------    ---------
   8470       316992
 12705     105664
-------    ---------
1278970    105980992
```

§. 44.

§. 47. **Lehrſatz.** Eine Zahl wird durch eine andere kleinere dividirt, wenn man ſucht, wie vielmal der Diviſor in den höchſten Ziffern des Dividendus, und ſo weiter in allen nachfolgenden enthalten iſt, z. E. in den Tauſendern, Hundertern, Zehnern, Einheiten; und die Partialquotienten hernach addirt; oder weil die Stellen des Quotienten durch die nachfolgende ſelbſt beſtimmt werden, nur, um die Weitläuftigkeit im Schreiben zu vermeiden, in der Ordnung ohne Nullen fortſchreibt.

§. 48. **Anmerk.** Es giebt bey der Diviſion zween Hauptfälle wie bey der Multiplikation; nämlich wenn der Diviſor ein einiges Zahlzeichen iſt, und zweytens, wenn er aus mehrern beſteht;

5945	1000
(5)	100
5000	80
945	9
(5)	1189
500	
445	
(5)	
400	
45	
(5)	
45	
0	

I. Fall. 5 iſt in 5 Tauſendern enthalten 1000 mal, dieſe 1000 mit 5 multiplizirt geben 5000, und von der erſten Zahl abgezogen laſſen 945; 5 in 9 Hunderter ſind enthalten 100 mal; dieſer Quotient mit 5 multiplizirt giebt 500, welche von 945 abgezogen, 445 übrig laſſen; 5 in 44 Zehner ſind enthalten 80 mal, 80.5 ſind 400, dieſe von 445 abgezogen laſſen 45; 5 in 45 Einheiten ſind enthalten 9 mal; 5.9 iſt 45, 45 von 45 läßt nichts. Wenn man nun die Partialquotienten (Produkte) addirt, ſo hat man 1189. Die Operation enthält den Beweis ſelbſt, folglich auch von der kürzern, wenn man die Nullen wegläßt, und in einem fort die Quotienten ſchreibt, welches bey einfachen Diviſoribus über ſich ſo leicht als unter ſich angeht, wie folgendes Exempel ausweiſt:

4	
5945	1189.
5555	

Der andere Fall iſt, wenn der Diviſor aus mehr Zahlzeichen beſteht, ſo ſucht man, wie oft die kleinere Zahl in der unmittelbar darüber ſtehenden größern enthalten ſeye; und weil man kein Einmal Eins für zuſammengeſetzte Zahlen hat, ſo muß man es eben verſuchen, da dann der Fehler, wenn man allenfalls es nicht recht getroffen hätte, bey der Methode unter ſich zu dividiren, leicht

```
 7654 |206 32/37
 (37)..|
  74..
 -----
   25 .
  (37):
   00 .
 -----
  254
  (37)
  222
 -----
   32
```

entdeckt und verbeſſert werden kann. Z. E. 7654 ſollen durch 37 dividirt werden; da man ſagt, 3 in 7 iſt zweymal enthalten, 2.37 iſt 74, dieß von der obigen Zahl 76 ſubtrahirt läßt 2, wozu man die folgende Zahl 5 herabſetzt; 3 in 2 iſt kein ganzes mal enthalten, man ſetzt alſo in den Quotienten 0, und weil 0.37 = 0, ſo bleiben 25 ganz übrig, wozu man die folgende Zahl 4 ſetzt, und abermal den Diviſor unterſchreibt; 3 in 25 iſt wegen dem folgenden 7 des Diviſors nur 6mal enthalten, oder 37 in 254 iſt 6 ganze mal enthalten; 6.37 = 222, dieſe Zahl von der obigen abgezogen läßt 32, welche Zahl nicht mehr ganz dividirt werden kann, man ſchreibt ſie daher zum Quotienten als einen Bruch $\frac{32}{37}$, davon im folgenden gehandelt wird.

§. 49. **Zuſatz.** Wenn die erſte Zahl des Diviſors gröſſer iſt als des Dividendus, ſo wird der Diviſor um eine Stelle weiter zurückgeſetzt. Z. E.

```
 4.2 3 6 | 68 20/62
  (62) . |
  3 7 2 .|
 --------
    5.1 6 .
    (62)
   . 4 9 6
 --------
      2 0
```

§. 50. **Zuſatz.** Wenn an dem Ende des Diviſors Nullen ſtehen, ſo werden von dem Dividendus ſo viel Zahlzeichen am Ende abgeſchnitten, als der Diviſor Nullen hat; z. E. 3248 dividirt durch 200 iſt

```
 1
 32 | 48 | = 16 48/200
 22 | 00 |
```

§. 51. **Anmerk.** Die Art und Weiſe unter ſich zu dividiren iſt bis §. 50. vorgetragen werden; ſie iſt die leichteſte, und der Sache am meiſten gemäß, indem die Produkte ordentlich un-

ter

ter einander geſchrieben werden, daß nicht leicht eine Verwirrung entſtehen kann. Wer das über ſich Dividiren gewohnt iſt, wird wohl thun, wenn er auch dieſe Art lernet, weil man doch ſie können muß, wenn man Quadrat- und Kubikwurzeln ausziehen will; bey einfachen Diviſoren iſt es ſchneller geſchehen, wenn man über ſich dividirt; ſonſt aber iſt die Art unter ſich zu dividiren allemal vorzuziehen; übrigens ſteht das obige Exempel §. 48. wenn man über ſich dividirt, folgendermaſſen aus:

2(32
16 54 | 206
877 |
3

man muß nämlich alle Produkte im Kopf behalten, und abziehen können.

§. 52. **Zuſatz.** Wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multiplizirt, und was übrig geblieben iſt, zum Produkt addirt, ſo muß der Dividendus wieder herauskommen; und wenn man das Produkt durch einen von den Faktoren dividirt, ſo muß der andere Faktor wieder herauskommen, woſern man im Rechnen nicht gefehlet hat; auf dieſe Weiſe dienen die Multiplikation und Diviſion einander gegenſeitig zur Probe.

§. 53. **Zuſatz.** Eine Zahl durch Eins multiplicirt oder dividirt, wird nicht verändert. $6 . 1 = 6$, und $\frac{6}{1} = 6$.

Die Rechnung in Brüchen.

§. 54. **Erklärungen.** Wenn ein Ganzes in etliche oder mehrere gleiche Theile getheilet wird, ſo heißt man einen oder mehrere Theile, die von dieſem Ganzen genommen werden, in Vergleichung mit dem Ganzen einen **Bruch** (fractio). Diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viele Theile das Ganze getheilet worden, heißt der **Nenner**, (denominator); die andere Zahl, welche anzeigt, wie viel Theile genommen werden, heißt der **Zähler**, (numerator); den Zähler ſchreibt man oben, und den Nenner unten, ſo, daß beyde durch einen Querſtrich abgeſondert werden; z. E. $\frac{1}{4}$.

Wenn der Zähler kleiner iſt als der Nenner, ſo heißt der Bruch ein **eigentlicher** Bruch (fractio propria), **uneigentlich** aber, oder (fractio ſpuria), wenn der Zähler gröſſer iſt als der Nenner; z. E. $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{7}$ ſind uneigentliche Brüche.

§. 55. **Anmerk.** Man kann die Brüche wie die Quotienten in der Diviſion anſehen; weil aber in einem eigentlichen Bruch der Nenner im Zähler nicht ein ganzes mal enthalten iſt, ſo fragt ſichs, wie oft ein gegebener Theil vom Ganzen, oder was für ein Theil vom Ganzen in dem Zähler enthalten ſey; z. E. in dem Bruch $\frac{7}{10}$ iſt die groſſe Zahl 10 in der kleinen 7 kein ganzes mal enthalten; oder das Ganze ſelbſt iſt in 10 Theil abgetheilt worden, und der zehente Theil vom Ganzen iſt in dem Zähler ſiebenmal enthalten.

§. 56. **Lehrſatz.** Brüche bleiben unverändert, wenn man den Zähler und Nenner mit einer und eben derſelben Zahl multiplizirt; denn wenn beyde mit einerley Zahl multiplizirt oder dividirt werden, ſo iſt es eben ſo viel, als ob ſie mit eins multiplizirt oder dividirt würden; weil $\frac{1}{1} = 1$, oder allgemein $\frac{m}{m} = 1$; dieſe Multiplikation und Diviſion durch Eins läßt die Größe unverändert §. 53. Oder auf folgende Weiſe: Wenn der Zähler und Nenner mit einer und eben derſelben Zahl multiplizirt werden, ſo wird der Bruch durch die eine Multiplikation um ſo viel gröſſer, um ſo viel er durch die andere wieder kleiner wird. Folglich muß er ungeändert bleiben. Eben das gilt bey der Diviſion. Z. E. $\frac{5}{6} = \frac{5}{6} : \frac{3}{3} = \frac{15}{18}$; und wiederum $\frac{6}{8} = \frac{6}{8} : \frac{2}{2} = \frac{3}{4}$.

§. 57. **Zuſatz.** Man kann alſo leicht Brüche von verſchiedenen Nennern unter einerley Benennung bringen, das heißt, ſchaffen, daß ſie alle einerley Nenner bekommen, wenn man nur einen jeden Bruch durch den Nenner des andern, odern wenn es mehr als zween ſind, einen jeden Bruch, das iſt, Zähler und Nenner in das Produkt aller übrigen Nenner, ſeinen eigenen ausgenommen, multiplizirt. Z. E. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3}{4} : \frac{5}{5} + \frac{2}{5} : \frac{4}{4} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20}$, oder $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} : \frac{2}{2} : \frac{5}{5} + \frac{1}{2} : \frac{3}{3} : \frac{5}{5} + \frac{4}{5} : \frac{2}{2} : \frac{3}{3} = \frac{20}{30} + \frac{15}{30} + \frac{24}{30}$.

§. 58.

§. 58. **Zuſatz.** Eben auf dieſe Weiſe iſt leicht zu urtheilen, ob ein Bruch gröſſer oder kleiner als der andere ſey; wenn man ſie nur vorher unter einerley Benennung gebracht hat. So iſt unter den drey Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, der letzte der gröſte, und der mittlere der kleinſte, weil $\frac{24}{30} > \frac{20}{30} > \frac{15}{30}$.

§. 59. **Zuſatz.** Brüche kann man dahero auch leicht aufheben, das iſt, kleiner ausdrücken, wenn ſich Zähler und Nenner mit einer dritten Zahl genau dividiren laſſen.

§. 60. **Anmerk.** Die Diviſores von groſſen Zahlen muß man durch Uebung finden lernen, oder wenn man es nicht ſchnell genug kann, den Nenner durch den Zähler ſo lang dividiren, als er ſich dividiren läßt, die letzte Zahl wird hernach beyde dividiren, und den Bruch aufheben. Sonſten hat man folgende Regel, die Diviſores ſchnell zu finden: man ſetze die Buchſtaben des Alphabets, a, b, c; a ſollen die Einheiten, b die Zehner, c die Hunderter bedeuten u. ſ. w. ſo wird der allgemeine Ausdruck aller Zahlen ſeyn $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f$ u. ſ. w. Denn obſchon die Buchſtaben b, c, d, e, &c. eben wieder die 9 Zahlzeichen, wie der Buchſtaben a bedeuten, und alſo einigermaſſen überflüſſig ſcheinen, ſo habe ich ſie doch auch hier wieder beybehalten, damit man ſogleich ſehe, die wievielte Ordnung im Lokalwerth, den ich ſonſt durch neue Zahlzeichen hätte beſtimmen müſſen, jedesmal vorkomme; dieß dient ſtatt einer Antwort auf eine ſehr freundſchaftliche Erinnerung in einer gewiſſen berühmten gelehrten Zeitung. Dividirt man nun dieſe allgemeine Zahl durch die 9 erſte Zahlzeichen oder auch mit den folgenden, und merkt auf die Reſte, ſo kann man gewiſſe Regeln machen.

2	a
3	$a+b+c+d+e+f$
4	$a+2b$
5	a
6	$a+4b+4c+4d+4e$ &c.
7	$a+3b+2c+6d+4e+5f+g+3h+ai+6k$ &c.
8	$a+2b+4c$
9	$a+b+c+d+e$ &c.
10	a
11	$a+10b+c+10d+e+10f$ &c. das iſt (*)
	$a-b+c-d+e-f$ &c.

(*) Die Regel, welche aus der Formel für 11; nämlich $a - b + c - d + e$ &c. folgt, kann mit Worten ſo ausge-

drückt werden; Will man wiſſen, ob ſich eine Zahl mit 11 theilen laſſe, ſo ziehe man die Summe der geraden Stellen von der Summe der ungeraden ab; läßt ſich der Reſt mit 11 aufheben, ſo geht auch die ganze Zahl mit 11 auf.

Woher aber in der Formel die Abwechſelung der Zeichen komme, erhellet aus der Diviſion ſelbſt.

Denn es ſeye a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f &c. durch 11 zu theilen;

I. 11 (a) kann nicht getheilet werden, da a das Zahlzeichen bedeutet, das in der Stelle der Einheiten ſteht, welches von einem Zehner nie anders als unter der Geſtalt eines Bruches getheilet werden kann.

II. 11(+10b) iſt zwar eigentlich $\frac{10}{11}$b; aber es kann auch dieſer Quotient durch 1b − $\frac{1}{11}$b vorgeſtellet werden; denn vermehrt man ihn mit dem Diviſor, ſo kömmt 11b − 1b = 10b; man ſetzt alſo zum Quotienten 1b; multiplicirt mit 11 = 11b; abgezogen, iſt er − 11b; reducirt + 10b − 11b = − b. Ferners

III. 11 (100c) 9c
99c
+c

IV. 11 (1000d) 91d
99
10d
− 11d
−d

V. 11 (10000e) 909e
−99
+100
−99
+e

VI. 11 (100000f) 9091f
−99
+100
−99
+10
−11f
−f &c.

Das giebt folgende Regeln. 1) Wenn ſich das letzte Zahlzeichen durch 2, oder 5, oder 10 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze Zahl durch 2, 5, 10 dividiren. Denn z. E. a + 10b + 100c + 1000d dividirt, durch 2, iſt $\frac{a}{2}$ + 5b + 50c + 500d u. ſ. w. es giebt alſo bey allen folgenden Zahlen keinen Bruch; wenn

wenn daher $\frac{a}{2}$ ſich ganz dividiren läßt ohne Bruch, ſo läßt ſich die ganze Zahl gewiß dadurch dividiren. 2) Wenn ſich die Summe aller Zahlzeichen durch 3 oder 9 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze Zahl dadurch dividiren u. ſ. w.

§. 61. **Lehrſatz.** Brüche laſſen ſich addiren und von einander ſubtrahiren, wenn man, woſern ſie einerley Nenner haben, nur die Zähler addirt oder von einander ſubtrahirt, und hernach den gemeinſchaftlichen Nenner darunter ſetzt. Denn der Nenner iſt der Name des Bruches; was aber gleichnamig iſt, das kann man zuſammen zählen; ſind aber die Nenner verſchieden, ſo muß man ſie vorher unter einerley Benennung bringen, und hernach addiren oder ſubtrahiren.

Exempel $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$; $\frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{2}{8} = 1\frac{1}{4}$. So iſt die Summe der Brüche §. 57. zuſammen $\frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$.

§. 62. **Zuſatz.** Man begreift von ſelbſt, wie man bey der Addition, wenn mehrmalen uneigentliche Brüche herauskommen, ſolche Brüche in ganze Zahlen verwandeln könne, wenn man nur wirklich mit dem Nenner dividirt, und was übrig bleibt, als einen Bruch ſetzt, den man nach Befinden aufheben kann, wie denn $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. nach §. 59.

§. 63. **Zuſatz.** Wenn man ganze Zahlen und Brüche addiren will, ſo muß man ſie unter einerley Benennung bringen, das iſt, die ganze Zahl als einen uneigentlichen Bruch anſehen, deſſen Nenner = 1, und ſodann nach geſchehener Reduktion unter einerley Benennung addiren. Z. E. $4 + \frac{3}{8} = \frac{4}{1} + \frac{3}{8} = \frac{4:8}{1:8} + \frac{3:1}{8:1} = \frac{32}{8} + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$. Eben das gilt bey der Subtraktion, z. E. $5 - \frac{3}{4} = \frac{5}{1} - \frac{3}{4} = \frac{5:4}{1:4} - \frac{3:1}{4:1} = \frac{20-3}{4} = \frac{17}{4}$.

§. 64. **Zuſatz.** Wenn man die Differenz zu dem ſubtrahirten Bruch wieder addirt, ſo kommt der erſte Bruch heraus. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ und $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

§. 65.

§. 65. **Lehrſatz.** Brüche werden mit einander multiplizirt, wenn man Zähler mit Zählern und Nenner mit Nennern multiplizirt; denn es iſt eben ſo viel, als ob man den Bruch als ein Ganzes anſieht, das wieder in ſo viele Theile getheilet wird, als des Multiplikators Nenner Einheiten hat; von dieſen Theilen nimmt man ſo viel, als der Zähler Einheiten in ſich begreiſt; das aber geſchieht, wenn man Nenner mit Nennern und Zähler mit Zählern multiplizirt; man ſoll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{5}$ multipliziren $\frac{3}{4}$ ſey A, $\frac{2}{5}$ ſey B, ſo iſt,

$$\begin{array}{ll} \text{weil } \frac{3}{4} = A & \frac{2}{5} = B \\ \hline \cdot 4 & \cdot 5 \\ 3 = 4A & 2 = 5B \\ 2 = 5B & \\ \hline 2 \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot A \cdot B & \\ \hline : 4 \cdot 5 & \\ \frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = A.B. & \end{array}$$

das geſuchte Produkt; ſetzt man nun ſtatt der Zahlen lauter Buchſtaben, ſo kann man den Satz in der höchſten Allgemeinheit erweiſen.

§. 66. **Zuſatz.** Das Produkt von zween eigentlichen Brüchen iſt alſo kleiner als ein jeder Faktor; denn man nimmt die gegebene Gröſſe nicht ein ganzes mal, ſondern etwa ein halb, ein drittel mal u. ſ. w. wie z. E. die Hälfte einer halben Ellen noch einmal kleiner iſt, als die halbe Elle; ſo iſt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

§. 67. **Zuſatz.** Wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch, oder einen Bruch durch eine ganze Zahl multiplizirt, ſo wird nur der Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplizirt; denn man kann die ganze Zahl als einen Bruch anſehen, deſſen Nenner = 1; z. E. $6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$.

§. 68. **Zuſatz.** Das Produkt aus einer ganzen Zahl in einen eigentlichen Bruch wird alſo auch kleiner als die ganze Zahl; weil ſie nicht einmal ganz, viel weniger mehrmalen genommen wird.

§. 69. **Zuſatz.** Das Produkt von zween Brüchen ſteckt in dem einen Faktor ſo oft, als der andere Faktor in der Einheit ſteckt. Z. E. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$; folglich $\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} : 1$ oder unter einerley Benennung $\frac{3}{8} : \frac{6}{8} = \frac{1}{2} : 1$.

§. 70. **Lehrſatz.** Brüche werden durch Brüche dividirt, wenn man den dividirenden Bruch umkehrt, das iſt, den Nenner zum Zähler, und den Zähler zum Nenner macht, und hernach multiplizirt; denn wenn ſie einerley Nenner haben, ſo fragt man nur, wie oft der Zähler des Diviſors im Zähler des Dividendus ſtecke z. E. $\frac{1}{8}$ iſt in $\frac{7}{8}$ enthalten $\frac{7}{1}$ mal; oder $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$ dreymal; haben ſie aber verſchiedene Nenner, ſo muß man ſie unter einerley Benennung bringen, und hernach anzeigen, wie oft der Zähler des Diviſors im Zähler des Dividendus enthalten ſey; dieſe Arbeit aber wird erhalten, wenn man den Diviſor umkehrt, und hernach multiplziirt; daher kein ſo weitläuftiges Geſchäft nöthig iſt. Z. E. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{6}{8} : \frac{4}{8} = \frac{6}{8} \times \frac{8}{4} = \frac{48}{32} = \frac{6}{4}$; aber eben das kömmt heraus, wenn ich $\frac{3}{4}$ durch den umgekehrten Diviſor $\frac{1}{2}$ multiplizire, dann $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{4}$. Der Beweis wird allgemein, wenn man ſtatt Zahlen Buchſtaben ſetzt. Folglich darf man nur den Diviſor umkehren, und hernach multipliziren (*).

(*) So allgemein Herr Clemm dieſe Regeln der 4 Rechnungsarten bey Brüchen in ſeinen *erſten Gründen aller mathematiſchen Wiſſenſchaften* erwieſen hat; ſo würde es doch wider die mathematiſche Lehrart gefehlet ſeyn, wenn man dieſe Beweiſe hier anführen wollte, da die Gründe der Buchſtabenrechnung noch nicht vorgetragen worden ſind.

§. 71. **Zuſatz.** Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man den Bruch umkehrt, und hernach multiplizirt; das iſt, wenn man die ganze Zahl in den Nenner des Bruchs multiplizirt, und mit ſeinem Zähler das Produkt dividirt; denn man kann die ganze Zahl als einen Bruch anſehen, deſſen Nenner eins iſt. Z. E. $6 : \frac{1}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{24}{1}$.

§. 72.

§. 72. **Zuſatz.** Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplizirt; aus obigem Grund §. 71. z. E. $\frac{4}{5}:6 = \frac{4}{5}:\frac{6}{1} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{30}$.

§. 73. **Zuſatz.** Wenn man einen eigentlichen Bruch durch Brüche, oder auch eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt, ſo wird der Quotient gröſſer werden, als der Dividendus; weil ein Bruch in einem andern, und noch vielmehr in einer ganzen Zahl etlich ganze mal enthalten ſeyn kann und iſt.

§. 74. **Zuſatz.** Hingegen wenn ein eigentlicher Bruch durch eine ganze Zahl dividirt wird, ſo wird der Quotient kleiner; welches ebenfalls geſchieht, wenn uneigentliche Brüche einander dividiren.

§. 75. **Zuſatz.** Der Dividendus enthält den Diviſor ſo oft in ſich, als der Quotient die Einheit. $\frac{2}{3}:\frac{1}{4} = \frac{8}{3}$; folglich $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3} : 1$, oder unter einerley Benennung $\frac{8}{12}:\frac{3}{12} = \frac{8}{3}:\frac{3}{3}$.

§. 76. **Zuſatz.** Wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multiplizirt, ſo kömmt der Dividendus heraus; und wenn man das Produkt durch einen Faktor dividirt, ſo kömmt der andere Faktor heraus.

§. 77. **Zuſatz.** Hat man Brüche, die an ganzen Zahlen hangen, und ſolle damit rechnen, ſo iſt es am beſten, wenn man alles unter einerley Benennung bringt, und ſodann das verlangte berechnet. Z. E. $3 + \frac{2}{5}\cdot 5 - \frac{1}{2} = \frac{15+2}{5}\cdot\frac{10-1}{2} = \frac{17}{5}\cdot\frac{9}{2} = \frac{153}{10}$. In der praktiſchen Arithmetik werden ſich einige andere Vortheile noch ſagen laſſen.

§. 78. **Zuſatz.** Wenn man den Zähler eines Bruchs mit einem Bruch multiplizirt, ſo werden Zähler mit Zählern, und Nenner mit Nennern multiplizirt; denn $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7} = \frac{4}{5}\cdot 5:7 = \frac{4}{5}:\frac{7}{5}$. nach §. 72. Hingegen wenn man den Nenner eines Bruchs mit

mit einem Bruch multiplizirt, ſo wird der multiplizirende Bruch umgekehrt. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2}{3}\cdot 5\cdot\frac{1}{7} = \frac{2}{3}\cdot 5:7 = \frac{2}{3}:\frac{7}{5}$.

§. 79. **Zuſatz.** Dividirt man den Zähler eines Bruchs mit einem Bruch, ſo iſt es eben ſo viel, als ob man den ganzen Bruch damit dividirte; $\frac{2:\frac{5}{7}}{3} = \frac{2\cdot\frac{7}{5}}{3} = \frac{2\cdot 7:5}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}$; dividirt man aber den Nenner mit einem Bruch, ſo iſt es eben ſo viel, als ob man den ganzen Bruch damit multiplizirte; $\frac{2}{3:\frac{5}{7}} = \frac{2}{3\cdot\frac{7}{5}} = \frac{2}{3\cdot 7:5} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}$. nach §. 67. 72. Man heißt dergleichen Brüche ſonſt auch fractiones fractioſas, ehe ſie noch aufgelößt werden.

Von Decimal- und Sexageſimalbrüchen.

§. 80. **Erklärungen.** Decimal- oder zehentheilige Brüche ſind Brüche, deren Nenner nach dem Geſetz der dekadiſchen Arithmetik fortgehen, und alſo 10, 100, 1000, 10000 u. ſ. w. ſind. Z. E. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{1000}$ ſind Dezimalbrüche; welche zuſammengeſetzt $\frac{345}{1000}$ heiſſen; man läßt aber, um alle Weitläuftigkeit zu vermeiden, die Nenner im Schreiben weg, weil man ſie jedesmal leicht hinzudenken kann, der Nenner iſt nämlich allemal die Einheit mit ſo viel angehängten Nullen, als der Zähler Zahlzeichen hat. Die ganzen Zahlen vor den Decimalbrüchen werden mit einem , oder . von den Brüchen abgeſondert, und heiſſen in der logarithmiſchen Rechnung die Charakteriſtik oder die Kennziffer. Z. E. 3,4682 iſt $3\frac{4682}{10000}$, 3 Ganze, 4 Zehentheile, 6 Hunderttheile u. ſ. w. (*). Wenn kein Ganzes vorhanden iſt,

(*) Auch wenn in der Mitte der Decimalſtellen an einer oder der andern die Größe abgeht, welche die Anzahl der Einheiten bezeichnen ſollte, ſo wird, wie bey den ganzen Zahlen, an ihrer Statt eine 0 geſetzt; z. B. Es wären 2 Zehentheile, 5 Tauſendtheile, 3 Hunderttauſendtheile zu ſchreiben; ſo würde es heiſſen:

iſt, ſo kömmt eine Nulle in die Stelle, z. E. 0,347 = 0,$\frac{347}{1000}$, kein Ganzes, aber 3 Zehentheile, 4 Hunderttheile u. ſ. w. (*).

§. 81. **Lehrſatz.** Ein jeder Bruch kann in Decimalbrüche verwandelt werden, wenn man dem Zähler ſo viele Nullen anhängt, auf wie viel Ziffer man die zehentheilige Brüche fortſetzen will, (wofern ſich nämlich die Rechnung nicht ſelbſt endiget), und hernach durch den Nenner gewöhnlicher maſſen dividirt. Der Beweis gründet ſich auf §. 56. Der Bruch bleibt einerley, wenn oben und unten mit Gleichem multiplizirt wird; es geſchieht aber dieſes, wenn man Nullen anhängt und dividirt; dann $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5 =$ 0,$\frac{5}{10}$ weil $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5} = \frac{5}{10}$ und alſo ein Decimalbruch; $\frac{1}{4} = \frac{1,00}{4}$ $= 0,25 =$ 0,$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}\cdot\frac{25}{25}$.

§. 82. **Zuſatz.** Wenn der Bruch durch die Diviſion nicht genau ſich ausdrücken läßt, ſo ſucht man ſeinem wahrem Werthe ſo nah zu kommen, daß der Fehler kaum ein Milliontheilchen betrift; z. E. $\frac{1}{3} = \frac{1,00000}{3} = 0,33333\ldots =$ 0,$\frac{333333}{1000000}$; der Fehler beträgt hier nur ſieben Milliontheilchen eines Ganzen.

§. 83.

ſen: 0,20503. Statt dieſer Nullen bezeichnen die wälſchen (manchmal auch die engliſchen) Mathematiker die Decimalſtellen mit einer Art Exponenten, die ſie Apices nennen; ſo zum B. wäre 3,5″7ᵛ = 3,05007; ſie benennen auch die Zahlzeichen des Zählers nicht nach der Anzahl der Nullen des zugehörigen Nenners, und ſagen ſtatt einem Zehentheile vna prima; 3 Hunderttheilchen, tres ſecundae &c. von der Anzahl der Einheiten der obgedachten Exponenten.

(*) Der Erfinder dieſer Art Brüche war **Simon Stevin**; er ſchlug dieſelben ſtatt der gemeinen Brüche zum Gebrauch vor, und gewiß bedient man ſich ihrer mit großem Vortheile, weil man ſie ſo leicht als ganze Zahlen behandeln kann, wie man ſehen wird. Tacquet, Wolf, und andere neuere Mathematiker haben dieſe ſchätzbare Erfindung erweitert, und die Regeln mit Beweiſen verſehen, was Stevin noch nicht that.

§. 83. **Lehrſatz.** Man kann alle vier Rechnungsarten bey den Dezimalbrüchen anbringen; der Beweis gründet ſich auf die Lehre von den Potenzen, deren Exponenten negativ ſind; wir wollen ihn im zweyten Hauptſtück vortragen, und inzwiſchen als einen Lehnſatz annehmen. Die Exempel werden die Rechnung doch deutlich machen.

§. 84. Exempel der vier Rechnungsarten in Dezimalbrüchen.

Addition.

$$\begin{array}{r} \tfrac{3}{7} = 0{,}42857 \\ \tfrac{4}{7} = 0{,}57142 \\ \hline \tfrac{7}{7} = 1 = 0{,}99999 \end{array}$$

Man addirt von der Rechten zur Linken wie in der gewöhnlichen Addition mit ganzen Zahlen; weil aber die beyde Brüche ſelbſt nicht genau in Dezimalbrüchen gegeben ſind, ſo iſt auch in der Summe ein Fehler von einem Hunderttauſendtheilchen, den man für nichts achten darf; eigentlich ſollten 1,00000 herauskommen, weil $\frac{7}{7} = 1 = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$.

Subtraktion.

$$\begin{array}{r} \tfrac{5}{4} = 1{,}25 \\ \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \\ \hline \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2} = 0{,}75 = \tfrac{3}{4} \end{array}$$

Bey der Subtraktion befolgt man wieder die gewöhnlichen Regeln; nur merkt man, daß, wenn bey einer Zahl kein Ziffer ſteht, wie bey 5, man in Gedanken eine 0 ſetzt, dann $\frac{1}{2} = 0{,}5$ oder 0,50, weil $\frac{50}{100} = \frac{5}{10}$, folglich ſagt man 0 von 5 läßt 5, 5 von 12 läßt 7, 0 von 0 läßt 0.

Multiplikation.

$$\begin{array}{r} \tfrac{5}{4} = 1{,}25 \\ \tfrac{8}{5} = 1{,}6 \\ \hline 1{,}25 \\ 0{,}750 \\ \hline \tfrac{40}{20} = 2{,}000 \end{array}$$

In dem Exempel der Multiplikation hat man mit der erſten Zahl zur Linken angefangen zu multipliziren, es iſt aber gleichviel, wenn man von der hinterſten Zahl anfängt; da die Partialprodukte hernach gegen die linke Seite vorrücken, wie vorher gegen die rechte. Z. E.

$$\begin{array}{r} 1{,}25 \\ 1{,}6 \\ \hline 0{,}750 \\ 1{,}25 \\ \hline 2{,}000 \end{array}$$

Die erſte Manier aber iſt gewöhnlicher; wenn einer oder beyde Faktores ohne Ende fortgiengen, und alſo nicht ganz wären, wo man ſie abbricht: ſo geben ſie auch kein genaues Produkt (*).

(*) Für die Multiplikation der Dezimalbrüche kann man folgende Regel merken:

I. Man ſchreibt die Dezimalen wie ganze Zahlen, und multiplizirt ſie nach den gemeinen Regeln.

II. Im Produkte werden ſo viele Zahlzeichen für die Dezimalbrüche abgeſchnitten, als in beyden Faktoren zuſammengenommen Dezimalſtellen waren.

III. Geſchieht es, daß im Produkte eben ſo viele Zahlen herauskommen, als in beyden Faktoren Dezimalſtellen ſind, ſo ſetzt man ſtatt der Ganzen eine 0.

IV. Sind aber weniger Zahlen im Produkte als Dezimalſtellen in den Faktoren, ſo ſetzt man von vorne ſo viele Nullen als zur Anzahl der Dezimalſtellen erfodert werden, dann auch eine für die Ganzen.

Beyſpiele. Zu N. II. 13,506 mit 0,24 multiplizirt macht

```
 13506
    24
------
 54024
27012
------
3,24144
```

Zu N. III. 0,234×0,56 iſt

```
  234
   56
-----
 1404
1170
-----
0,13104
```

Zu N. IV. 0,0053×0,004 iſt 53×4

0,0000212

Diviſion.

```
1,6.00|2,56
(0,625)
 1,250
-------
 0,35.0.0
 (0,625)
  3125
-------
   3750
 (0,625)
   3750
-------
      0
```

Die Diviſion befolgt einerley Regeln mit der gewöhnlichen Art unter ſich zu dividiren; nur muß man merken, daß man, ſo lang die Diviſion fortgeſetzt wird, jedesmal eine Nulle dem Reſt des Dividendus anhängen muß, weil durch die angehängte Nullen die Dezimalprogreſſion von ſelbſt ſich beſtimmt; geht es ohne Ende fort, ſo hört man auf, wo man glaubt, daß der Fehler klein genug und kaum merklich ſey (*).

(*) Bey der Diviſion merke man für die Ausübung nachfolgende Regeln.

I. Die

I. Die Dezimalen werden geſchrieben und dividiret wie die Ganzen.

II. Im Quotienten werden ſo viele Stellen abgeſchnitten, als der Reſt beträgt, wenn die Anzahl der Dezimalſtellen im Diviſor von der Anzahl der Dezimalſtellen im Dividendus abgezogen wird.

III. Wenn die Anzahl der Dezimalſtellen in beyden Zahlen gleich iſt, ſo hat der Quotus keine Dezimalſtelle; auſſer es bliebe etwas im Reſte, zu dem man ſodann eine o ſetzen, und in der Diviſion fortfahren kann.

IV. Wenn die Anzahl der Dezimalſtellen im Diviſor gröſſer iſt, als die im Dividendus, ſo hängt man dem Dividendus Nullen an, bis man dividiren kann, und ſodann iſt der erſte Quotient ein Ganzes; werden mehr Nullen angehängt, und die Diviſion fortgeſetzt, ſo werden die folgenden Stellen im Quotus Dezimalen ſeyn.

Beyſpiele. Zu N. II. 3,7036 : 4,7; ſo iſt

```
47(37036)788 = 0,788.
   413
    376
   ———
     0
```

Zu N. III. α. $\frac{181,23}{25,89}$ iſt 2589 (18123) 7 Ganze.

β. $\frac{437,23}{0,25}$ iſt 25(43723)1748,92

```
   187
    122
     223
      230
        50
      ————
         0
```

Zu N. IV. $\frac{4,5}{3,75}$ iſt 375(450)1,2

```
   375
    750
   ————
     0
```

Siehe Metzburg Institutiones Mathematicae &c. Vindob. 1775. wo die Lehre von den Dezimalbrüchen im erſten Bändchen Elem. Arithm. c. VII. eben ſo kurz als gründlich abgehandelt wird.

§. 85. **Erklär.** Sechzigtheilige Brüche ſind ſolche Brüche, deren Nenner in der Progreſſion 60, 60 . 60, 60 . 60 . 60 u. ſ. w. fortgehen. Wenn alſo ein Ganzes, wie z. E. die Stunden, in ſechzig Theile, (Minuten) der ſechzigſte Theil wieder in ſechzig kleinere Theile, (Sekunden) u. ſ. w. eingetheilt werden, ſo bekömmt man ſechzigtheilige Brüche, (fractiones ſexageſimales). Man ſchreibt ſie, wie in der Geometrie die Minuten, Sekunden, Terzen, z. E. 4 St. 50′ 20″ 30‴. Das iſt 4 St. $+ \frac{50}{60} + \frac{20}{60.60} + \frac{30}{60.60.60}$ einer Stunde, welche als die Einheit betrachtet wird; und weil 60 allemal auf die Einheit gehen, ſo kann man den obigen Ausdruck 4 St. u. ſ. w. auch ſchreiben $4.60 + 50 + \frac{20}{60} + \frac{30}{60.60}$ u. ſ. w.

§. 86. **Zuſatz.** Man kann alſo auch hier alle vier Rechnungsarten anwenden, nur muß man bey dem Entlehnen oder Behalten merken, daß man von der nächſten höhern Stelle das Entlehnte nach der Sexageſimalprogreſſion nehme, weil eine Einheit der höhern Ordnung nicht 10, ſondern 60 von der unmittelbar niedern enthält.

§. 87. **Anmerk.** Die Exempel werden die Sache deutlich machen.

Addition.	Subtraktion.
6 St. 04′ 32″ 08‴	12. St. 18′ 52.″ 07‴
20 St. 12′ 50″ 16‴	2 St. 20′ 04″ 12‴
26 St. 17′ 22″ 24‴	9 St. 58′ 47″ 55‴

Dann 16 und 8 Terzen geben 24 Terzen; 50′ und 32″ geben 82′ das iſt 1′ und 22″, die 1′ behalte ich für die höhere Stelle; 12′ und 4′ nebſt 1′, die ich behalten, geben 17′; 6 und 20 St. geben 26. Eben ſo macht man es bey der Subtraktion; 12‴ von 7‴ kann man nicht ſubtrahiren, man entlehnt alſo eine Sekunde, die 60‴ giebt, 12‴ von 67‴ läßt 55‴; oder 2 von 7 läßt 5, 1 von 6 (weil die 0 durch das Entlehnen 6 wird) läßt 5; u. ſ. w. die leeren Plätze zur Linken füllt man mit einer Nulle aus, damit man nicht ſo leicht fehle; dann 7‴ = 07‴; und weil man nie über 60 zählt, ſo braucht man nur eine einige Stelle auszufüllen, welches geſchieht, ſo oft die Anzahl unter 10 iſt.

Bey der Multiplikation merkt man nur auf die obige Ausdrücke §. 85. z. E. man ſolle 17 St. mit 46‴ multipliziren, ſo iſt das im Zeichen ausgedruckte Produkt $= 17.60.\frac{46}{60.60.60} = \frac{17\ 46}{60\ 60} = \frac{782}{60.60} = 782'' = 13'\ 2''$. Um dieſe letzte Diviſion durch 60 zu erſparen, hat man einen Canon Hexacondat. ſchon gemacht, worinnen man alle Produkte von 1 bis 60 nachſchlagen kann, ſo iſt 17.46 in dem Kanon 13′ 02″ ausgedrückt. Die Diviſion hat auch keine Schwierigkeit, wenn man nur die Lehre von den Brüchen verſtehet, wie wir ſie vorgetragen haben. Dann z. E. $33':16'' = \frac{33}{60}:\frac{16}{3600} = \frac{33}{60}.\frac{3600}{16} = \frac{1980}{16} = 123 + \frac{12}{16} = 120 + 3 + \frac{12}{16} = 2.60 + 3 + \frac{12}{16}:\frac{60}{60} = 2.60 + 3 + \frac{45}{60}$. wenn man beyderſeits mit 16 dividirt (*).

(*) Wenn man einen Sexageſimalbruch in einen gemeinen Bruch, deſſen Nenner gegeben iſt, verwandeln ſoll, ſo vermehrt man den Zähler des Sexageſimalbruches mit dem gegebenen Nenner, und theilet das Produkt durch den Nenner des Sexageſimalbruchs. Z. B. 0,4′ oder $\frac{4}{60}$ ſoll man zur Benennung 100 bringen; man vermehrt 4 mit $100 = 400:60 = 40:6 = 6\frac{4}{6} = 6\frac{2}{3}$.

Wenn man einen gemeinen Bruch in einen Sexageſimalbruch verwandeln will, ſo vermehrt man den Zähler des gemeinen Bruchs mit 60, dividirt das Produkt durch die gegebenen Nenner, ſo wird der Quotient der Sexageſimalbruch ſeyn; z. B. der Bruch $\frac{3}{7}$ ſoll zu einen Sexageſimalbruch gemacht werden; es wird alſo ſeyn $3 \times 60:7 = 180:7 = 25\frac{5}{7} = \frac{25}{60} + \frac{5}{7}$; oder will man weiter wiſſen, wie viel $\frac{5}{7}$ Sexageſimalen des zweyten Ranges machen, ſo ſetzt man die obige Arbeit fort; $5 \times 60:7 = 300:7 = 42\frac{6}{7}$; und wieder $6 \times 60:7 = 360:7 = 51\frac{3}{7}$ u. ſ. w. auf welche Art man ſich dem wahren Werthe von $\frac{3}{7}$ in Sexageſimalen immer mehr nähern kann.

Wenn man angeben ſoll, wie viel in einer gewiſſen Anzahl Sexageſimalen einer höhern Ordnung, Sexageſimalen der niedrigern Ordnungen enthalten ſeyen; ſo theilet man die gegebene Zahl ſo oft mit 60, als die Benennung ſeiner Ordnung Einheiten hat weniger eins; die Quotienten geben die in ſelber enthaltne Anzahl der Sexageſimalen der niedrigern Ordnungen.

Z. B. es wären 39312928 Sexageſmalen der 5ten Ordnung zu reduziren, ſo iſt

6ø (3931292(8) 655215 $\frac{28}{60}$ ——— weiter

6ø (65521(5) 10920 $\frac{15}{60}$

6ø (10920) 182 $\frac{0}{60}$
ø

6ø (18(2) 3 $\frac{2}{60}$

Alſo ſind $39312928^{'''''} = 3^{\circ}, 2' \; 0'' \; 15''' \; 28''''$.

Kann aber die Diviſion nicht mehr fortgeſetzet werden, noch ehe man zur erforderlichen Anzahl kömmt, ſo ſetzt man im Quotus ſo viel Nullen zur Linken, als noch Diviſionen abgehen, die nicht verrichtet werden konnten; und endlich noch eine an die Stelle der Ganzen. Z. B.

Es ſeyen 126025 Sexageſmalen vom ſechsten Grade;

6ø (12602(5) 2100 $\frac{25}{60}$

6ø (210ø) 35 $\frac{0}{60}$

6ø (3(5) 0 $\frac{35}{60}$

Weil die Diviſion nur dreymal verrichtet werden konnte, da ſie doch fünfmal erfoderlich wäre, ſo iſt

$126025^{VI} = 0, \; 0 \; 0 \; 35 \; 0 \; 25.$

§. 88. **Anmerk.** Wie man dieſe Rechnung durch die Potenzen und durch die Vergleichung mit ihren, theils poſitiven, theils negativen Exponenten erweiſen könne, wird im zweyten Hauptſtücke vorkommen.

§. 89. **Anmerk.** Der Nutzen der Sexageſmalbrüche zeigt ſich vornämlich in aſtronomiſchen und chronologiſchen Rechnungen.

Von den Potenzen.

§. 90. **Erklärungen.** Wenn man eine Zahl mit ſich ſelbſt etlichemal multiplizirt, ſo iſt das Produkt ihre Potenz, und zwar die zweyte, oder das Quadrat, wenn man ſie ein-

mal,

mal, die dritte oder der Kubus, wenn man ſie zweymal, die vierte, die fünfte, die ſechste Potenz u. ſ. w. wenn man ſie drey, vier, fünf, ſechsmal mit ſich multiplizirt. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Faktor mit ſich ſelbſt multiplizirt worden ſey, weniger eins, heißt der Exponent, und der einfache Faktor die Wurzel. Wenn die Wurzel nicht genau ſich ergiebt, ſo heißt ſie irrational. Z. E. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$.

§. 91. **Willkühr. Satz.** Den Exponenten ſchreibt man mit einer kleinen Ziffer, welche oben an die groſſe Ziffer angehängt wird; z. E. $4^3 = 64$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$. Die Wurzelzeichen haben wir ſchon erklärt; wenn man die Quadratwurzel verlangt, ſo wird kein Ziffer in das Wurzelzeichen geſetzt, verlangt man aber höhere Wurzeln, ſo muß allemal innerhalb dem Wurzelzeichen eine kleine Ziffer ſtehen, welche anzeigt, die wievielte Wurzel man wolle. Z. E. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[4]{625} = 5$, $\sqrt[6]{1000000} = 10$.

§. 92. **Zuſatz.** Das Quadrat eines Bruchs iſt alſo das Quadrat des Zählers dividirt durch das Quadrat des Nenners, und der Kubus eines Bruchs der Kubus des Zählers dividirt durch den Kubus des Nenners, oder überhaupt die höhere Potenz eines Bruchs die Potenz des Zählers durch eben die Potenz des Nenners dividirt; weil die Potenz eines Bruchs der Bruch mit ſich ſelbſt etlichemal multiplizirt iſt. $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$, $(\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25}$; eben ſo muß man auch, wenn man Wurzeln verlangt, aus dem Zähler und Nenner die nämliche Wurzel ausziehen. $\sqrt{(\frac{16}{25})} = \frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{(\frac{8}{27})} = \frac{2}{3}$.

§. 93. **Lehrſatz.** Eine jede Wurzel kann man anſehen, als beſtünde ſie aus zween Theilen, (radix binomia) denn eine Zahl mag groß oder klein ſeyn, ſo läßt ſie ſich in zween Theile zerfällen, z. E. $320 = 300 + 20$; $5 = 4 + 1$; $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ u. ſ. w.

§. 94. **Zuſatz.** Wenn man alſo das erſte Glied der Wurzel a und das andere b nennet, ſo kann der Ausdruck $a + b$ alle mögliche Wurzeln, $(a + b)^2$ alle mögliche Quadrate, $(a + b)^3$ alle mögliche Kubos u. ſ. w. bedeuten.

§. 95. **Zuſatz.** Der allgemeine Ausdruck des erſten Glieds kann dahero in Zahlen viel einzelne Stellen anzeigen; z. E. $3428 = 3000 + 400 + 20 + 8$, da dann $a = (3000 + 400 + 20)$ und $b = 8$, oder $a = (3000 + 400)$ und $b = (20 + 8)$ u. ſ. w. So auch $(a + b)^2 = ((3000 + 400 + 20) + 8))^2$, oder $((3000 + 400) + (20 + 8))^2$ u. ſ. w.

§. 96. **Lehnſatz.** Das Quadrat von $a + b$, wenn man es wirklich ausdrückt, iſt $a^2 + 2ab + b^2$; wie im zweyten Hauptſtück erwieſen werden ſoll; folglich beſtehen alle mögliche Quadrate aus dem Quadrat des erſten Gliedes, aus dem doppelten Produkte der Glieder, und aus dem Quadrat des zweyten Gliedes.

§. 97. **Zuſatz.** Man kann alſo das zweyte Glied jedesmal finden, wenn man, nach abgezogenem Quadrat des erſten Gliedes, den Reſt durch die doppelte Wurzel des abgezogenen Quadrats dividirt, da man dann das Produkt dieſes Diviſors in das zweyte gefundene Glied nebſt dem Quadrate dieſes Gliedes nochmalen ſubtrahirt, und hernach wiederum die zwey gefundenen Glieder als eines, nämlich als das erſte anſieht, durch deſſen Duplirung man das neue Glied auf eine ähnliche Weiſe ſuchet.

§. 98. **Lehnſatz.** Ein jeder Kubus von $a + b$ oder $(a + b)^3$ wirklich ausgedrückt, heißt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; daher beſteht er aus dem Kubus des erſten Gliedes, aus dem dreyfachen Produkte des Quadrats des erſten Gliedes in das zweyte, aus dem dreyfachen Produkte des erſten Gliedes in das Quadrat des zweyten, und aus dem Kubus des zweyten Gliedes.

§. 99. **Zuſatz.** Man kann alſo das zweyte Glied finden, wenn man nach Abzug des Kubus vom erſten Gliede den

Reſt mit dem dreyfachen Quadrat des erſten Gliedes dividirt, hernach die drey Partialprodukte abziehet, und was abermal übrig bleibt, auf eine ähnliche Weiſe behandelt, wenn man nur merkt, daß man die zwey gefundene Glieder als eines anſehen, und dahero mit ihrem dreyfachen Quadrat wieder dividiren muß u. ſ. w.

§. 100. Anmerk. In der Zahlenrechnung verlangt man nur Quadrat = und Kubikwurzeln; höhere Potenzen kommen ſelten vor; man hat zu dem Ende für die Zahlen das Wurzeltäfelein nur bis auf die Kubikzahlen berechnet: wir wollen die Biquadrate noch hinzuthun: ſie gehen in vierfacher Ordnung bis auf 9, oder 10, wie folgende Tabelle zeigt:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Kubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Biquadrate	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000

Aus dieſem Täfelein erhellt, daß von eins bis 9 kein Quadrat mehr als zwey, und kein Kubus mehr als drey, und kein Biquadrat mehr als vier Zahlzeichen, wohl aber weniger enthalte.

Von Ausziehung der Quadratwurzel in Zahlen.

§. 101. **Lehrſatz.** Weil kein Quadrat von eins bis neun mehr als zwey Zahlzeichen hat, ſo theilt man die gegebene Zahl in Klaſſen von der Rechten zur Linken ein, deren jede zwey Zahlzeichen hat, da kann die äuſſerſte zur Linken auch nur ein Zahlzeichen haben kann, weil es auch ſolche Quadrate giebt; §. 100. Von der äuſſerſten Klaſſe zur Linken wird das nächſt kleinere Quadrat, das man im Wurzeltäfelein ſucht, abgezogen, und die im Wurzeltäfelein darüber ſtehende Wurzel in die Stelle des Quotienten geſeßt; dieſe Wurzel oder dieſen Quotienten duplirt man, und dividirt damit den

Reſt; der Quotient iſt das zweyte Glied; §. 97. das Produkt des zweyten Gliedes oder des neuen Quotienten in den Diviſor, und das Quadrat des zweyten Gliedes zieht man von dem dividirten Reſt ab, und was übrig bleibt, dividirt man abermal mit dem doppelten Quotienten, deſſen zwey Glieder nur für eines angeſehen werden §. 97. u. ſ. w. bis entweder die Wurzel genau ſich ergiebt, oder bis man, wenn ſie nicht genau kann gefunden werden, durch Anhängen je zwoer Nullen, die Diviſion in Dezimalbrüchen ſo lang fortgeſetzt hat, als man für nöthig findet, um etwa den Fehler auf Millionentheilchen herabzuſetzen, daß er kaum merklich iſt.

§. 102. **Zuſatz.** Wenn man das zweyte Glied zum Diviſor in die nächſtfolgende Stelle ſetzt, und hernach dieſe vermehrte Zahl mit dem zweyten Glied multiplizirt, ſo kömmt das doppelte Produkt der Glieder und das Quadrat des zweyten Gliedes heraus; dann 4 ſey das erſte Glied doppelt, alſo der Diviſor, und 3 das zweyte Glied, ſo iſt $(40 + 3) \cdot 3 = 43 \cdot 3 = 40 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 2ab + bb$. Dahero man jedesmal nur den neuen Quotienten der unmittelbar niedrigern Stelle an den Diviſor hinſetzen darf, um die Rechnung abzukürzen.

§. 103. **Zuſatz.** Bey den angehängten Nullen iſt es nicht nöthig, im Quotienten die Renner, welche in der Dezimalprogreſſion fortgehen, wirklich zu ſchreiben, wenn man nur durch ein Strichlein nach den ganzen Zahlen anzeigt, daß jetzo die Dezimalbrüche anfangen; daß aber durch die angehängte Nullen die Zahl nicht vermehrt werde, erhellt daher, weil man ſie eigentlich mit einem Bruch, deſſen Nenner dem Zähler gleich iſt, nämlich $\frac{100}{100} = 1$ multiplizirt, welches die Zahl nicht vermehrt; ſondern nur behilflich iſt, den Reſt der Wurzel genauer zu finden.

§. 104.

§. 104. Anmerk. Die Sache läſt ſich durch Exempel am beſten erläutern. Man ſolle aus 1703025 die Quadratwurzel ausziehen; man theilt die Zahl in Klaſſen von der Rechten zur Linken, und giebt jeder Klaſſe zwey Zahlzeichen §. 100, auf der äuſſerſten zur Linken darf auch eins ſtehen. Von dieſer äuſſerſten Klaſſe wird das gleiche oder nächſt kleinere Quadrat abgezogen: hier iſt es das gleiche, nämlich 1, und die Wurzel iſt auch 1; der Reſt 70 wird herabgeſetzt, und mit der doppelten Wurzel dividirt; die doppelte Wurzel iſt 2, die man unter die 7 ſetzt, weil ſie eigentlich 20, oder wegen den folgenden Stellen 2000 iſt; mit 2 dividirt man, und ſetzt in den Quotienten 3; dieſe 3 ſetzt man auch neben die 2 nach §. 102. und multiplizirt dieſe Zahl 23 mit dem neuen Quotienten 3; das Produkt 69 ſubtrahirt man von 70; und zum Reſt 1 ſetzt man die folgende Klaſſe 30 herab; den Quotienten 13 ſieht man nun als das erſte Glied an, und duplirt es, damit man 2 . 13 = 26 zum Diviſor bekomme; man unterſchreibt ihn ſo, daß ſeine letzte Zahl 6 unter die erſte Zahl 3 der folgenden Klaſſe zu ſtehen kommt; weil er eigentlich 260 iſt; der Quotient iſt = 0, denn 26 in 13 iſt 0 mal enthalten; dieſen Quotienten = 0, ſetzt man neben die 6, und multiplicirt alles mit dem neuen Quotienten = 0, ſo kommt 0 heraus; das ſubtrahirt von dem obigen, läßt die Zahl 130 ganz; man ſetzt die folgende Klaſſe 25 dazu herab; ſieht 130 als das erſte Glied an, duplirt es, und bekömmt den Diviſor 260, deſſen letztes Zahlzeichen, die Nulle unter die erſte der folgenden Klaſſe, nämlich unter 2 geſchrieben wird, aus ſchon gemeldten Gründen; man dividirt wirklich, ſetzt den Quotienten 5 herab; multiplizirt alles damit; das Produkt ſubtrahirt man, und der Reſt iſt nichts.

```
1|70|30|25/1305
1|
---------
 |70
 (22)
  69
---------
   1|30
  (2 60)
   0 00
---------
   1 30|25
    (26 05)
   1 30 25
---------
        0
```

§. 105. Anmerk. Will man die Quadratwurzel aus einer Zahl, die kein vollkommenes Quadrat iſt, ausziehen, ſo geſchieht ſolches durch Näherung (per approximationem), indem man der gegebenen Zahl ſo vielmal je zwo und zwo Nullen anhängt, als man glaubt, daß zur Näherung genug ſey, nach §. 101. 103. Die Sache wird durch ein Exempel deutlich werden. Man ſoll die

die Quadratwurzel aus 3 ausziehen, ſo ſetzt man 3, und ſucht das nächſt kleinere Quadrat 1, das man von 3 abzieht, und deſſen Wurzel 1 man in die Stelle des Quotienten ſetzt; den Reſt vermehrt man mit 2 Nullen oder 00, das iſt, man multiplizirt den Reſt 2 mit $\frac{100}{100}$, da dann $\frac{200}{100} = 2$ die vorige Zahl iſt; aus dem Nenner 100 zieht man in Gedanken die Quadratwurzel aus, = 10; welches der Nenner in dem Quotienten iſt, den man aber nicht ſchreibt, weil man die Nenner in Dezimalfraktionen hinzuzudenken gewohnt iſt; nur wird der Anfang der Brüche durch ein ,(Strichlein) von der vorhergehenden Zahl abgeſondert; den gefundenen Quotienten duplirt man, damit man den Diviſor 2 bekomme; man ſchreibt ihn wie §. 103, nämlich unter die erſte Zahl der folgenden Klaſſe; und ſagt 2 in 20 iſt 7mal enthalten; zwiſchen dieſem Quotient 7 und dem 1 wird ein ,(Strichlein) geſetzt, weil mit 7 die Dezimalbrüche anfangen, und es eigentlich heißt $\frac{7}{10}$; den Zähler 7 ſetzt man neben die 2, multiplizirt alles mit 7, und zieht das Produkt von 200 ab; den Reſt dividirt man abermal mit dem duplirten ganzen Quotienten 1, 7 oder $\frac{17}{10}$; der nun als das erſte Glied angeſehen wird, und fährt wie §. 104. fort, bis man den Fehler unerheblich macht; da dann $\sqrt{3} = 1{,}73205$ oder $= 1,\frac{73205}{100000}$, wenn man den Nenner wirklich ſetzt, bey nahe ſeyn wird.

```
3 | 1,73205.... = √3
1 |
------
2 | 0.0
 (27)
1 8 9
------
   11. | 0.0
  (3 4 3)
   1 0 2 9
-----------
     7.1. | 0.0
    (3 4 | 6 2)
     6 9   2 4
     -----------
       1 7 6 | 0 0
      (3 4 6 | 4 0)
       0 0 0 0 0
       ---------------
       1 7 6.0.0. | 0.0
        (3 4 6 4 | 0 5)
       1 7 3 2 0 2 5
       ---------------
           2 7 9 7 5
```

§. 106. Anmerk. Wenn man die gefundene Wurzel mit ſich ſelbſt multiplizirt, und was übrig geblieben, zum Produkt addirt, ſo muß die gegebene Zahl wieder herauskommen. Dieſe Operation nennt man die Probe der Quadratrechnung.

Von

Von Ausziehung der Kubikwurzel in Zahlen.

§. 107. **Lehrſatz.** Aus der Wurzeltafel iſt klar, daß keine Kubikzahl von 1 bis 9 über drey Zahlzeichen enthält, wohl aber weniger; folglich muß man eine gegebene Zahl, woraus man die Kubikwurzel ausziehen ſolle, in ſolche Klaſſen von der Rechten zur Linken eintheilen, deren jede drey Zahlzeichen bekömmt, die äuſſerſte zur Linken aber auch zwey oder eins haben kann. §. 100. Von der äuſſerſten Klaſſe zur Linken zieht man den entweder gleichen oder nächſt kleineren Kubus ab, und ſetzt ſeine Wurzel in die Stelle des Quotienten; dieſes Quotienten Quadrat triplirt man, und dividirt hernach den Reſt der Zahl dergeſtalt damit, daß man das letzte Zahlzeichen des Diviſors unter das erſte Zahlzeichen der folgenden Klaſſe ſchreibe, in welchem Fall man das zweyte Glied der Wurzel bekommen wird. Dieſen neuen Quotienten multiplizirt man in dem Diviſor, und ſchreibt die letzten Zahlzeichen des Produkts unter das erſte Zahlzeichen der folgenden Klaſſe; hernach multiplizirt man das Quadrat des neuen Quotienten mit dem vorhergehenden Glied des Quotienten, triplirt das Produkt, und ſchreibt ſein letztes Zahlzeichen unter das zweyte Zahlzeichen der ſchon genannten Klaſſe, und ſodann weiter gegen die Rechte; endlich kubirt man den neuen Quotienten, und ſchreibt ſein letztes Zahlzeichen unter das letzte Zahlzeichen der gegebenen Klaſſe; die Partialprodukte addirt man zuſammen, und ſubtrahirt ſie von der obenſtehenden Zahl, die man dividirt hat. Den Reſt dividirt man von neuem, und ſieht den ganzen Quotienten nunmehro als das erſte Glied an, das man quadrirt und triplirt, welches Produkt den neuen Diviſor giebt, u. ſ. w. bis entweder alles aufgeht, oder bis man, wenn in der letzten Klaſſe noch was übrig bleibt, durch je drey und drey angehängte Nullen, weil nämlich hier drey Zahlzeichen in die Klaſſe gehören, dem wahren Werth der Wurzel in Dezimalbrüchen ſich ſo nähert, daß der Fehler endlich

lich unmerklich wird. Der Beweis erhellet aus §. 97 — 99.

§. 108. **Anmerk.** Wir wollen die Sache durch einige Exempel erläutern. Man verlangt die Kubikwurzel aus 47437928, welche man genau geben kann. ohne daß man nöthig hätte, Nullen anzuhängen; man ſetze alſo die Zahl hin, und theile ſie von der Rechten zur Linken in ihre Klaſſen ein nach §. 107. von der äuſſerſten Klaſſe zur Linken ziehe man den nächſt kleinern Kubus 27 ab, und ſetze ſeine Kubikwurzel 3 in die Stelle des Quotienten. Man quadrire den Quotienten 3, ſo hat man 9, dieſes Quadrat triplire man, ſo hat man 27, den neuen Diviſor, deſſen letztes Zahlzeichen man unter das erſte der herabgeſetzten folgenden Klaſſe ſetzt; man ſchließt ihn in () ein, damit man bey Addirung der Partialprodukte alle Verwirrung vermeide; nun dividirt man wirklich; 2 in 20 iſt wegen der folgenden 7 und den vielen abzuziehenden Partialprodukten nur 6mal enthalten, mit dieſem neuen Quotienten multiplizirt man den Diviſor, ſo hat man das erſte Partialprodukt, nämlich das dreyfache Produkt aus dem Quadrate des erſten Theils in den zweyten $= 3a^2b$; man ſetzt es ſo, daß das letzte Zahlzeichen 2 unter den 7 oder 4, das erſte der folgenden Klaſſe zu ſtehen kommt; hernach quadrirt man den neuen Quotienten 6, multiplizirt ihn mit dem vorhergehenden Glied 3, und triplirt das Produkt, ſo hat man $3ab^2 = 324$; das letzte Zahlzeichen wird unter das mittlere der obigen Klaſſe, nämlich gerade unter 3 geſchrieben; endlich kubirt man den neuen Quotienten 6; da im Wurzeltäfelein $6 . 6 . 6 = 216$, ſo hat man b^3; man ſchreibt ſein letztes Zahlzeichen unter das letzte der gegebenen Klaſſe; addirt alle Partialprodukte zuſammen; ſubtrahirt die Summe von den obern dividirten Zahlen 20437, und dividirt den Reſt 781 mit der folgenden herabgeſetzten Klaſſe, alſo 781928, auf die nämliche Weiſe, wenn man nur merkt, daß nun a oder das erſte Glied der ganze Quotient 36, folglich

		47	4 37	928	362
		27			
		2.0.	4.37		
Diviſor	$3a^2 =$	(27)..			
Partial-	$3a^2b =$	1 6 2 ..			
Produkte	$3ab^2 =$	3 2 4 .			
	$b^3 =$	2 1 6			
ihre Summe		1 9 6 5 6			
Reſt		781		928	
NeueDiviſor	$3a^2 =$	(388 8)..			
Partial-	$3a^2b =$	7776..			
Produkte	$3ab^2 =$	432.			
	$b^3 =$	8			
ihre Summe		781928			
Reſt		0.			

a²

$a^2 = 36 . 36$ und $3a^2 = 3 . 36 . 36 = 3888$, welchen neuen Diviſor man ſo unterſchreibt, daß ſein letztes Zahlzeichen unter das erſte der herabgeſetzten folgenden Klaſſe zu ſtehen kömmt; worauf man wie bey der erſten Operation fortfährt.

§. 109. **Anmerk.** Wenn man die Wurzel nicht genau finden kann, ſo ſucht man ſie durch Näherung, und hängt, ſo vielmal man will, je drey und drey Nullen der gegebenen Zahl an, da man dann wie §. 108. zu Werke geht. Z. E. die Kubikwurzel aus 67 ſoll gefunden werden; man ſetzt die Zahl hin, und zieht den nächſt kleinern Kubus 64 von ihr ab, die Wurzel dieſes Kubus 4 kömmt in die Stelle des Quotienten. Den Reſt 3 vermehrt man mit drey Nullen, oder eigentlich zu reden, multiplizirt ihn mit $\frac{1000}{1000}$, welches ſchon Dezimalbrüche giebt; nämlich die Wurzel des Nenners iſt 10, weil 10.10.10. = 1000; die Wurzel des Zählers ſucht man, indem das erſte Glied 4 quadrirt und hernach triplirt $3 . 4 . 4 = 48$ zum Diviſor wird, den man unterſetzt wie §. 108. 4 in 3 iſt 0 mal enthalten, alſo geben die Partialprodukte lauter Nullen; folglich bleibt die obige Zahl im Reſt, daran man abermal drey Nullen hängt; man ſucht den neuen Diviſor, indem man 48 oder 40 für das erſte Glied anſieht, es quadrirt und triplirt, um den Diviſor zu bekommen, den man wie §. 108. unterſetzt; er iſt nämlich 4800; die letzte Nulle wird unter die erſte Nulle der neuen Klaſſe geſchrieben; hernach dividirt man wirklich; 4 in 30 iſt 6mal enthalten, (wegen der folgenden 8 und wegen abzuziehenden Partialprodukte). Die Partialprodukte ſucht man wie §. 108. und fährt fort, ſo lang man will.

	67	4,061
	64	
	3	000
	(4	8)
	0 000	
	3 0.0.0˙	0.0.0
$3a^2 =$	(480 0). .	
$3a^2b =$	2 880 0 . .	
$3ab^2 =$	43 20 .	
$b^3 =$	216	
Summe =	2923416	
Reſt. =	7.6584	0.0.0
$3a^2 =$	(4 94508)˙ .	
$3a^2b =$	494508 ˙ .	
$3ab^2 =$	1218	
$b^3 =$	1	
Summe =	4946298 1	
Reſt =	27121019	
	u. ſ. w.	

§. 110. **Zuſatz.** Weil das Quadrat und Kubus, und überhaupt die Potenz eines wahren Bruchs, er mag eigentlich oder uneigentlich ſeyn, niemal eine ganze Zahl wird, wie im zweyten Hauptſtück von den Irrational = oder ſurdiſchen Gröſſen gezeigt werden ſoll, ſo kann die Wurzel durch

Nä-

Näherung niemalen ganz und vollkommen gefunden werden; denn man müßte ohne Ende fortrechnen.

§. 111. **Zuſatz.** Wenn man die Kubikwurzel wieder kubirt, das iſt, zweymal mit ſich ſelbſt multiplizirt, und den Reſt zum Produkt addirt, ſo muß die gegebene Zahl wieder herauskommen; das iſt die Probe der Kubikrechnung.

§. 112. **Anmerk.** Man könnte noch weitere Wurzeln arithmetiſch ausziehen; gemeiniglich aber läßt man es bey dieſen zwo Gattungen bewenden. Zum Beweis, daß alles auf einerley Manier geſchehe, will ich ein Exempel von der Biquadratrechnung geben; man ſoll aus 4236789 die Biquadratwurzel ausziehen; weil kein Biquadrat von 1 bis 9 aus mehr als 4 Ziffern beſteht, wohl aber auch weniger haben kann nach §. 99. ſo wird die Zahl in ſolche Klaſſen getheilt, davon jede vier Ziffer hat, die letzte zur Linken aber auch weniger haben darf; von der äuſſerſten Klaſſe zur Linken zieht man das gleiche oder nächſt kleinere Biquadrat ab, und ſetzt die Wurzel in die Stelle des Quotienten. Dieſen Quotienten kubirt man, und nimmt ſein vierfaches, welches der neue Diviſor iſt; den gefundenen Quotienten multiplizirt man mit dem Diviſor, und fängt das Produkt an zu ſchreiben unter die erſte Ziffer der folgenden Klaſſe; man multiplizirt hernach die Quadrate der beyden gefundenen Glieder, nämlich des erſten und neuen Quotienten mit einander, und ſchreibt ihr ſechsfaches Produkt ſo, daß unter die nächſte Ziffer der herabgeſetzten Klaſſe die letzte Ziffer dieſes ſechsfachen Produkts geſchrieben wird; hernach kubirt man den neuen Quotienten, multiplizirt ihn mit den vorhergehenden, und nimmt das Quadrat vierfach, das man eine Stelle weiter zur Rechten zu ſchreiben anfängt; in der letzten Stelle zur Rechten der Klaſſe fängt man noch das Biquadrat des neuen Quotienten von hinten zu ſchreiben an, addirt die Partialprodukte zuſammen, zieht die Summe von der erſten Zahl ab, und dividirt abermal den mit einer neuen Klaſſe vermehrten Reſt auf eben dieſe Art, da man wie bey der Quadrat- und Kubikrechnung den ganzen Quotienten, oder das erſte und zweyte Glied für eines annimmt und es $= a$ ſetzt. Der Grund von dieſer Rechnung iſt der allgemeine Ausdruck eines Biquadrats $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Von

Von den Verhältniſſen in Zahlen.

§. 113. **Anmerk.** Die Lehre von den Verhältniſſen iſt die Seele der ganzen Mathematik; hier kann ſie noch nicht ſo gründlich als im folgenden Hauptſtücke, dahin ſie eigentlich gehöret, vorgetragen werden. Wir verweiſen alſo den Leſer um ſo eher dahin, als die praktiſche Rechenkunſt, worinnen dieſe Lehre vorzüglich genützet wird, erſt das dritte Hauptſtück ausmacht, folglich im gegenwärtigen Hauptſtücke noch keine ausführliche Erklärung nöthig hat. Inzwiſchen wollen wir nur was weniges in Rückſicht auf die Zahlen hier vortragen.

§. 114. **Erklär.** Wenn zwo Zahlen ſo mit zwo andern verglichen werden, daß die Quotienten in beyden gleich ſind, ſo ſtehen die vier Zahlen in einer (geometriſchen) Proportion, welche man in der gemeinen Arithmetik eigentlich zu wiſſen nöthig hat. Man ſchreibt ſie durch die Diviſionszeichen, welche die natürlichſte Art ſie auszudrücken iſt; z. E. $3:6 = 4:8$; 3 in 6 iſt 2mal enthalten, und 4 in 8 auch zweymal; wenn das zweyte Glied dem dritten gleich iſt, ſo heißt die Proportion kontinuirlich $3:6 = 6:12$.

§. 115. **Zuſatz.** Man kann alſo die Proportion auch durch die Multiplikation der Quotienten in das 2 und dritte Gliede ſchreiben: z. E. $3:2 = 4:2.4$; $3:2.3 = 2.3:2.2.3$.

§. 164. **Lehrſ.** Aus drey gegebenen Zahlen läßt ſich allemal die vierte Proportionalzahl finden, wenn man das Produkt des zweyten und dritten Gliedes mit dem erſten dividirt; weil nach §. 115. allemal $\frac{2.3.4}{3} = 2.4$, oder wenn a das erſte Glied, m der Exponent, b das dritte, $\frac{mab}{a} = mb$; und wie §. 114. $a:ma = b:mb$.

§. 117. **Zuſatz.** In der kontinuirlichen Proportion wird das Quadrat des zweyten Gliedes durch das erſte dividirt, das letzte geben.

§. 118. **Zuſatz.** Durch die Verſetzung kann man ein jedes der vier Glieder zum vierten machen, folglich was man für eines von den vier Gliedern ſuchen will, finden.

§. 119. **Lehrſatz** Das mittlere Glied in einer kontinuirlichen Proportion wird gefunden, wenn man aus dem Produkt der beyden äuſſerſten die Quadratwurzel extrahirt; denn weil $a : ma = ma : m^2a$, ſo iſt das Produkt der beyden äuſſerſten m^2a^2, folglich ſeine Quadratwurzel ma dem mittlern Gliede gleich. Oder in Zahlen $3 : 6 = 6 : 12$ folglich $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$.

§. 120. Anmerk. Dieß iſt das Fundament von der Regel de Tri, und allen übrigen darauf ſich gründenden Regeln der praktiſchen Arithmetik, davon wir im dritten Hauptſtücke handeln werden, wenn wir vorher in dem nun folgenden Hauptſtücke von der Buchſtabenrechnung neben andern wichtigen Lehren auch die Lehre von den Verhältniſſen ausführlich werden vorgetragen haben.

Zweytes Hauptſtück.

von der

Buchſtabenrechnung.

§. 121.

Erklärung.

Die Buchſtabenrechnung drückt die Größen durch allgemeine Zeichen aus, und lehret, wie man mit dieſen allgemeinen Zeichen rechnen, das iſt, aus gegebenen Größen andere unbekannte ſuchen ſolle. Man heißt ſie Buchſtabenrechnung, weil die allgemeinen Zeichen der Größen die wirklichen Buchſtaben des lateiniſchen beſonders kleinern, auch zuweilen, wenn man viel ſchickliche Zeichen braucht, des griechiſchen und deutſchen Alphabets u. ſ. w. ſind. Wir werden die Lehre davon nach dem Plane des vorigen Hauptſtückes ausführen, und dahero zuerſt von der Geſchichte dieſer Rechnung etwas ſagen.

Die Geſchichte der Buchſtabenrechnung.

§. 122. Es iſt ein gemeines Vorurtheil, daß man ſich entweder vor der Buchſtabenrechnung fürchtet, weil man ſie für die ganze Algebra hält, oder auch, daß man ſich was darauf einbildet, und ſchon für einen vollkommenen Algebraiſten ausgiebt, wenn man dieſe Rechnung verſteht. Die Geſchichte davon wird das Vorurtheil heben, und den Anfänger beherzt machen, etwas mit einer nur halbjährigen Aufmerkſamkeit zu lernen, wodurch er in den Stand geſetzt

wird, manche wegen der darinn angebrachten Buchſtabenrechnung für tiefſinnig gehaltene Werke unſeres Jahrhunderts nicht nur leſen, ſondern auch ſelbſt ſchreiben zu können, wenn es nöthig wäre, und wenn man an ſolchen Büchern einen Mangel haben ſollte.

§. 123. Unter den Alten wird insgemein der Diophantes zuerſt genannt, welcher in ſeinen Libris arithmeticorum die Anweiſung gegeben, wie man unbeſtimmte und beſtimmte Aufgaben in Zahlen durch eine Art von Gleichungen auflöſen ſolle. Er trug dieſe Lehre in der Arithmetik vor, ſie gehört alſo auch nach den Einſichten der Alten dahin. Und daß Diophantes unter den einſichtsvollen Alten einen entſcheidenden Rang behaupte, wird niemand läugnen. Er lebte in der Mitte des zweyten Jahrhunderts unter den Antoninen, und war einer der größten Mathematiker zu Alexandrien. Seine gegebene Anweiſung heißt noch jetzo die Ars Diophantea. Sie beſtehet aus 13 Büchern, davon aber nur noch 6 vorhanden ſind, welche Xylander im Jahr 1575 lateiniſch überſetzt zuerſt in öffentlichen Druck gab; die nachfolgende Ausgabe des Caſpar Bachet vom Jahr 1621. iſt ungleich beſſer, weil der griechiſche Text nicht nur beygedrückt, ſondern auch richtiger erklärt iſt.

§. 124. Vielleicht würde dieſer Name der Diophanteiſchen Kunſt ſo gemein als der Name Algebra ſeyn, wenn man nicht, ehe noch die Schriften des Diophantes wieder bekannt wurden, von den Arabern eine Art von Rechenkunſt erhalten hätte, welche mit der oben genannten übereinkömmt, und nur durch ihren arabiſchen Namen ſich unterſcheidet.

§. 125. **Anmerk.** Eigentlich iſt die Algebra eine Regel aus der Rechenkunſt, wie z. E. die Regel de Tri, die Regel Quinque, die Regula Falſi, Coeci u. ſ. w., worzu noch die Dignitäten und Potenzen kamen, welche man die Coſſiſche Rechnung nannte, und worauf ſich unſere alten deutſchen Rechenmeiſter gut verſtanden, unerachtet ſie zu lernen ungleich ſchwerer war, als die heutige Al-

Algebra; Wir wollen nur etwas von den Kunſtwörtern und Zeichen der Koſſiſten ſagen. Die erſte Dignität hieß nach der arabiſchen Benennung Zenſus, und wurde geſchrieben Z, weil Zenſus mit einem Z anfängt; die Wurzel daraus drückte man durch ℞. aus. Die dritte Dignität oder der Cubus hieß C, und die Wurzel ℞C. Die vierte Dignität hieß Zenſizenſus, und wurde geſchrieben ZZ; die fünfte Surdeſolidum, und geſchrieben Sz; die ſechſte Zenſicubus, ZC; die ſiebente Biſſurdeſolidum, Bß. Die achte Zenſizenſizenſus, ZZZ. Die neunte Cubicubus, CC; die zehente Zenſiſurdeſolidum, Zßß, u. ſ. w. welche Namen und Ausdrücke ungleich ſchwerer zu behalten ſind, als die heutzutage üblichen; doch muß man ſie wiſſen, wenn man die Schriften der coſſiſchen oder überhaupt algebraiſchen Bücher leſen und verſtehen will, die vor dem Vieta und Carteſius herausgekommen ſind. Die erſten algebraiſchen Schriftſteller dieſer Art, wie ſie von den Arabern gebildet wurden, waren Lukas Paciolus, oder nach dem Ordensnamen Lucas de Burgo ſancti ſepulcri, ein Italiäner, der im Jahr 1494. Summam Arithmeticæ & Geometricæ Proportionumque & proportionalitatum herausgegeben, und im 8. Buch die Algebra nach der Lehrart der Araber doch nur kurz vorgetragen hat. Unter den deutſchen Rechenmeiſtern folgten Adam Rieſe, und Michael Stiefel, welcher letztere in ſeiner Arithmetica integra und deren dritten Buch, die Algebra als ein Stück der Arithmetik abgehandelt hat. Sie ſind aber in ihren Auflöſungen nicht weiter als auf die quadratiſchen Gleichungen gekommen; bis endlich Scipio Ferreus und Cardanus, in Arte Magna, quam vulgo Coſſam vocant, 1545. Regeln für kubiſche Gleichungen gefunden haben u. ſ. w., ehe noch die neuere Algebra aufkam.

§. 126. Endlich bekam die Algebra eine neue Geſtalt, welche nach und nach immer verſchönert wurde, als **Franz Vieta**, einer der größten Mathematiker der franzöſiſchen Nation, von Fontenai in Poitou gebürtig, geweſener Requetenmeiſter bey der Königinn Margaretha, im Jahr 1590. die eigentliche Buchſtabenrechnung zuerſt erfunden, und ſtatt der Ziffern allgemeine Zeichen, nämlich Buchſtaben, und zwar die größern Buchſtaben des Alphabets eingeführt hatte. Doch war er zu beſcheiden, den alten Namen der Algebra mit dem ſeinigen zu verwechſeln, und die Nachkommen haben ihm auch die Ehre nicht angethan, daß ſie dieſe Kunſt

die Artem Vieteam genannt, und dadurch den arabiſchen Namen verdrungen hätten. Inzwiſchen bekam doch die Algebra einen Beynamen, und hieß ſeit den Zeiten des **Vieta** Algebra Speciosa; andere haben auch ſynonymiſche Ausdrücke eingeführt, und ſie bald Arithmeticam ſpecioſam, bald univerſalem, wie **Newton**, bald literalem, oder auch nur Calculum literalem genannt.

§. 127. An dieſer Buchſtabenrechnung hat man immer verbeſſert, ſo viel man konnte; wir wollen aber hier nur die Hauptveränderungen erzählen. Die erſte ſchreibt ſich vom **Thom. Harriot**, einem Engländer, her, welcher ſtatt der groſſen Buchſtaben kleine eingeführt, und bey der Multiplikation die Buchſtaben bloß ohne Zeichen zuſammengeſetzt hat; wie ſolches aus ſeiner zu London 1631 herausgekommenen Praxi Artis analyticæ erhellet. Die anderen Hauptverbeſſerungen hat man dem **Carteſius** zu danken, welcher die Potenzen durch hinten angeſetzte kleine Ziffern bezeichnet, da er z. E. ſtatt aaa ſchrieb a^3, und noch überdieß dieſe Rechnung auf die höhere Geometrie angewandt hat. Die dritte Verbeſſerung iſt dem **Newton** und **Leibnitz** zuzuſchreiben, von welchen ohnehin die Algebra auf den höchſten Gipfel gebracht worden; in der Buchſtabenrechnung haben ſie unbeſtimmte Exponenten eingeführt, und noch überdieß die Rechnung des Unendlichen erfunden, davon die Geſchichte in einem andern Hauptſtücke vorkommen wird. Hier merken wir nur dieſes an, daß in neuern Zeiten die Buchſtabenrechnung zween Haupttheile noch in ſich begreift, deren einer Analyſis finitorum genannt wird, wenn man aus gegebenen endlichen Gröſſen andere unbekannte findet; der andere Analyſis infinitorum, wenn man aus unendlich kleinen Gröſſen durch die Differential- und Integralrechnung endliche unbekannte Gröſſen ſuchet.

§. 128. Anmerk. Aus dieſer kurzen Geſchichte wird man doch begreifen, daß es um die Buchſtabenrechnung gar nichts ſo ſchweres ſey, als man meint. Die Zahlenrechnung iſt noch ſchwerer,

rer, oder wenigſtens mühſamer, wie man aus der Vergleichung bald merken wird, beſonders wenn einem das Einmal Eins ſo beſchwerlich zu lernen iſt. Denn in der Buchſtabenrechnung hat man keins. Der arabiſche Name darf einen eben ſo wenig ſchrecken. Unſere zehen Zahlzeichen, die doch Kinder ſchon wiſſen, hagen wir ja auch von den Arabern erhalten. Der eigentlich arabiſche Wiz in der Algebra beſteht etwa in etlichen Regeln, wie z. E. die Regel de Tri iſt; und dieſe verſteht doch ſchon ein jeder Kaufmannsjunge. Wem aber dieß alles noch nicht genug zur Aufmunterung iſt, dem will ich die Worte des Herrn Hofrath **Käſtners** aus der Vorrede zu ſeiner Mathematik I. Th. anführen, wenn er ſchreibt: „ Die Buchſtabenrechnung iſt jedem unentbehrlich, der „ ohne allzugroſſe Weitläuftigkeit die nothwendigſten Lehren einſe„ hen, und in den Stand kommen will, ſich ſelbſt einigermaſſen „ zu helfen. Sollte ja einer zu furchtſam ſeyn, ſo will ich ihm „ zehen bis zwölf Oktavbände und Quartanten weiſen, deren Ver„ faſſer auf verſchiedenen Univerſitäten Deutſchlands wegen der „ darinnen angebrachten Buchſtabenrechnung für tiefſinnige Ma„ thematiker, ja gar für Algebraiſten gehalten werden, und ich „ will ihn auf meine Ehre verſichern, daß ihn ein halbes Jahr „ in den Stand ſetzen ſoll, eben ſo tiefſinnige Werke zu ſchrei„ ben, wenn er nur einen mittelmäßigen Fleiß anwenden will. "

Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchſtaben.

§. 129. **Erklärungen.** Die Art mit Zeichen und Buchſtaben zu rechnen kann man nicht gründlich verſtehen, es ſey dann, daß man ſich einen deutlichen Begriff von entgegengeſetzten Gröſſen, das iſt, von **poſitiven** und **negativen**, oder bejahenden und verneinenden Gröſſen bilde. Man heißt nämlich entgegengeſetzte Gröſſen, die in einer ſolchen Verhältniß gegeneinander betrachtet werden, daß eine die andere vermindert; z. E. Vorwärts und Rückwärtsgehen; Vermögen und Schulden; 7 Thl. Vermögen und 4 Thl. Schulden, machen 3 Thl Vermögen; oder 7 Thl. Schulden und 4 Thl. Vermögen machen 3 Thl. Schulden. Wenn man die Schulden poſitiv nennt, ſo iſt das Vermögen, als verneinende Schulden, negativ; nennt man aber das Vermögen poſitiv, ſo ſind die Schulden,

ein verneinendes Vermögen, negativ, daher es gleichgültig und willführlich iſt, welche man von beyden poſitiv oder negativ nennet. Di negativen haben das Zeichen —, und die poſitiven das Zeichen +. Beyde aber ſind wirkliche Größen, wie z. E. beydes Vorwärts und Rückwärtsgehen was wirkliches iſt.

§. 130. **Zuſaz.** Negative Gröſſen ſind alſo wahrhaftige Größen, und der Ausdruck, **weniger als nichts**, ſchickt ſich nicht hieher, es wäre dann, daß man das Nichts vorher erklärte, und zeigte, daß man kein **abſolutes**, ſondern nur **reſpektives** Nichts darunter verſtünde.

§. 131. **Anmerk.** Dieſe kurze Lehre muß man ſich vorzüglich bekannt machen, wenn man die erſten Gründe dieſer Wiſſenſchaften genau lernen und verſtehen will. Man kann die Sache mit Exempeln deutlich genug machen. Wenn man den Zuſtand, wo man weder vor ſich, noch rückwärts geht, ein **Nichts** heißt, ſo wäre Rückwärtsgehen weniger als nichts, woferne man Vorwärtsgehen was poſitives nennt; oder wenn der Zuſtand, wo einer weder Vermögen noch Schulden hat, ein Nichts genannt wird, ſo ſind Schulden weniger als nichts, wofern man das Vermögen was poſitives heißt, oder Vermögen weniger als nichts, woferne Schulden poſitiv genannt würden. Wenn einer 100 Thl. Schulden hat, und bekömmt 100 Thl. zur Tilgung ſeiner Schulden geſchenkt, ſo hat er erſt nichts; vorher hatte er alſo 100 Thl. weniger als dieſes reſpektive Nichts. In den geometriſchen Wiſſenſchaften wird dieſe Lehre weiter erläutert. Die Sinus zwiſchen 180 und 360 Graden ſind negativ, unerachtet ſie wirkliche Linien ſind, die den entgegengeſetzten poſitiven Sinuſſen gleich ſind; die Coſinus über 90° ſind negativ u. ſ. w. oder Linien des Diameters vom Mittelpunkt gegen die rechte Hand genommen, ſind poſitiv, gegen die linke negativ, oder umgekehrt; es ſind aber alles wirkliche Gröſſen. Durch dieſe Exempel wird unſer Vortrag hinlänglich erläutert ſeyn.

§. 132. **Lehrſaz.** Ungleiche entgegengeſezte, das iſt, poſitive und negative Größen von einer Art werden addirt, wenn man die kleinere von der gröſſern abzieht, und dem Reſt das Zeichen der gröſſern giebt; denn das, was ein-

einander aufhebt, muß man aufheben, weil es ſolche Gröſſen ſind, die einander vermindern §. 129. Von der gröſſern aber, weil ſie ungleich ſind, wird allemal noch was übrig bleiben, alſo muß man auch dem Reſt das Zeichen der gröſſern Größe geben. Z. E. + 6 — 2 = 4, + 3 — 8 = — 5. Wenn man, was ſich gleich gegeneinander aufhebt, ſchnell überſchauet, und ſodann den Reſt mit dem gehörigen Zeichen ſetzt, ſo hat man dieſe Regeln nicht ſo nöthig; wie wir unten in Exempeln zeigen.

§. 133. **Zuſatz.** Gleiche entgegengeſetzte Größen heben alſo einander auf, und werden ein reſpektives Nichts, weil nichts übrig bleibt, + 3 — 3 = 0.

§. 134. **Zuſatz.** Wenn einerley Zeichen vorhanden ſind, ſo iſt es vor ſich klar, daß man ſie ſchlechthin addirt, mit Beybehaltung des Zeichens. + 3 + 5 = + 8; — 3 — 2 = — 5.

§. 135. **Willk. Satz.** Bey der Buchſtabenrechnung wird am Anfange, wenn kein Zeichen vorhanden iſt, allemal das Zeichen + verſtanden; oder das Zeichen + wird im Anfange der Reihe von Zahlen und Buchſtaben nicht ausgedrückt; wohl aber das Zeichen —, wenn es da ſeyn ſoll; eine einzelne Größe wird ohne das Zahlzeichen 1 geſchrieben, z. E. + a, nicht + 1a, — b, nicht — 1b.

§. 136. **Zuſatz.** Wenn Größen von verſchiedener Art addirt werden ſollen, ſo werden ſie bloß mit ihren Zeichen zuſammengehängt. Z. E. 2a + 3b = 2a + 3b.

§. 137. **Lehrſatz.** Man kann alſo in der Buchſtabenrechnung I. wo beyderſeits einerley Zeichen ſind, nach §. 134. II. wenn verſchiedene Zeichen + und — untereinander ſtehen, nach §. 132. 133. III. wenn die Größen von verſchiedener Art ſind nach §. 136. die Addition leicht verrichten, wie uns folgende Exempel belehren.

§. 138. Exemp. Weil man nach §. 121. die Größen mit den kleinen Buchſtaben des Alphabets zu bezeichnen pflegt, ſo wird man folgende Exempel leicht verſtehen; der I. Fall iſt, wenn oben und unten gleiche Zahlen vorkommen. 3a und 2a geben 5a,

$$\begin{array}{l} 3a - b + 4f - 3g \\ 2a - 5b + 2f - 2g \\ \hline 5a - 6b + 6f - 5g \end{array}$$

—b und —5b geben —6b, + 4f und + 2f geben + 6f, — 3g und — 2g geben — 5g; es iſt nämlich gleichgültig, ob man vor oder rückwärts addirt, weil die Buchſtaben keinen Werth nach ihren Stellen haben.

II. Fall; wenn verſchiedene Zeichen vorkommen; z. E. 6a und 3a

$$\begin{array}{l} 6a - 4b + 3f - g \\ 3a + 5b - 8f + g \\ \hline 9a + b - 5f \end{array}$$

geben 9a, — 4b + 5b geben + b, dann 4 heben ſich gegen 4 auf, und eins mit dem Zeichen + bleibt noch übrig, (oder 4b von 5b läßt b, und zwar + b, weil die größere Zahl 5b das Zeichen + hat). Ferner + 3f—8f laſſen noch —5f, dann + 3f gegen — 3f heben ſich auf; folglich ſetzt man von — 8f nur noch — 5f (oder 3f von 8f laſſen 5f, mit dem Zeichen —, weil die größere Zahl 8f dieſes Zeichen hat); endlich + g — g heben ſich auf; folglich iſt die Summe 9a + b — 5f; bey dieſem Falle kann es auch geſchehen, daß mehrere Reihen als zwo untereinander geſetzt werden; z. E. 3a + 2a giebt 5a, und — a giebt 4a;

$$\begin{array}{l} 3a - 6b + f \\ 2a + 3b - 3f \\ -a - 2b + 4f \\ \hline 4a - 5b + 2f \end{array}$$

— 6b und — 2b giebt — 8b, und + 3b läßt — 5b, + f + 4f giebt 5f, und — 3f läßt + 2f; in welchem Falle man entweder die gleichbezeichneten zuerſt zuſammen zählt, und hernach die obige Regel bey verſchiedenen Zeichen anwendet, oder wenn man im Zählen geübt iſt, nur ſogleich was ſich gegeneinander aufhebt, wirklich aufhebt, und die Reſte mit ihren gehörigen Zeichen ſetzt.

III. Fall; wenn verſchiedene Buchſtaben, das iſt, Größen, die nicht von einer Art ſind, vorkommen, ſo werden ſie bloß mit ihren Zeichen zuſammen geſetzt, wie folgendes Exempel ausweiſt.

$$\begin{array}{l} 2a - b + 3g \\ 4a + 2b - h \\ \hline 6a + b + 3g - h. \end{array}$$

Wir wollen noch ein Exempel geben, wo alle Fälle vorkommen; und hernach die Regel auf genannte Zahlen anwenden; damit man ſehe, daß ſie allgemein und natürlich ſey; denn wenn einer gut addiren kann, ſo kann er ſogleich auch ſubtrahiren.

a—3bg

$$\begin{array}{l} a - 3bg + f - 4h - cd \\ 2a - 2bg - 3f + 3h - 4cd + g \\ \hline 3a - 5bg - 2f - h - 5cd + g. \end{array}$$

Oder in genannten Zahlen:

4 fl.	+	30 kr.	—	2 ₰. *)			
3 fl.	—	50 kr.	+	3 ₰.			
7 fl.	—	20 kr.	+	1 ₰			

§. 139. **Lehrſatz.** Wenn man entgegengeſetzte Gröſſen von einander ſubtrahirt, ſo darf man bloß alle Zeichen der zu ſubtrahirenden Zahl mit den entgegengeſetzten, das iſt, + mit — und — mit + verwechſeln, und hernach addiren, die Summe wird die Differenz ſeyn. Denn entweder hat die zu ſubtrahirende Gröſſe das Zeichen +, oder ſie hat das Zeichen —; iſt jenes, ſo iſt klar, daß durch die Subtraktion aus **plus minus** werden müſſe; denn wenn man + 3 von 8 ſubtrahirt, ſo hat man 8 — 3; hat aber die abzuziehende Gröſſe das Zeichen **minus**, ſo muß + daraus werden; denn wenn die poſitive Gröſſe ihr Zeichen in das Zeichen der negativen bey der Subtraktion verwandelt, ſo muß kraft des unmittelbaren Gegenſatzes die negative ihr Zeichen in das Zeichen der poſitiven verwandeln.

§. 140. **Zuſatz.** Wenn eine Gröſſe, davon eine andere Gröſſe abgezogen werden ſoll, von einer dritten ſubtrahirt wird, ſo wird die erſte ſubtrahirt und die andere abbirt; weil eben dieſe zweyte zuviel abgezogen worden, wenn man die erſte ganz ſubtrahirt hat. Z. E. Wenn ich von 9 ſubtrahire 8 — 4, ſo kömmt heraus 9 — 8 + 4 = 5; denn wenn man 8 ganz ſubtrahire, ſo kömmt heraus 1, ich ſoll aber nur 8 — 4 ſubtrahiren, folglich muß ich 4 wieder addiren. Die zu ſubtrahirende Gröſſe wird in eine ( ) eingeſchloſſen, z. E. $7 - (5 - 4) = 7 - 5 + 4 = 6$; $10 - (3 - 1) = 10 - 3 + 1 = 8$.

§. 141.

*) Dieſe Zeichen bedeuten **Denar**, oder **Pfenning**.

§. 141. **Exemp.** Man wird alſo leicht ſubtrahiren können, wenn man addiren kann. Wir wollen etliche Exempel geben: man verändere nämlich bloß die Zeichen der zu ſubtrahirenden Zahl; 2a hat kein Zeichen, man verſteht alſo das Zeichen + nach §. 135. folglig ſetzt man darunter —, b hat +, man ſetzt darunter —, 3g hat —, man ſetzt dafür +, f hat —, man ſetzt +; dieſe unten geſchriebene Zeichen werden beobachtet, und nach denſelben beyde Reihen addirt, ſo iſt die letzte Reihe die Differenz. Eben ſo wird folgendes Exempel berechnet.

$$\begin{array}{ccccccc} 3a & - & b & + & 4g & - & f \\ 2a & + & b & - & 3g & - & f \\ - & & - & & + & & + \\ \hline a & - & 2b & + & 7g & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 5a & - & 3b & + & f & - & 9h & + & 8 & & \\ 2a & + & 3b & + & f & - & 8h & - & 8 & + & g \\ - & & - & & - & & + & & + & & - \\ \hline 3a & - & 6b & & & - & h & + & 16 & - & g \end{array}$$

§. 142. **Willk. Satz.** Die Produkte in der Buchſtabenrechnung werden durch Zuſammenſetzung der Buchſtaben ausgedrückt, ohne weitere Zeichen. Z. E. a.b heißt ab, ein Ausdruck für alle mögliche Produkte; a.b.d = abd; wenn ein Buchſtabe oder eine Größe mit ſich ſelbſt ein oder mehrmalen multiplizirt wird, ſo hängt man am Ende eine Zahl oberhalb des Buchſtabens, welche anzeigt, wie oft er mit ſich ſelbſt multiplizirt worden; z. E. für aa ſchreibt man a^2, für aaa, a^3, für bbbb, b^4 u. ſ. w.

§. 143. **Lehrſatz.** Die Multiplikation mit entgegengeſetzten Größen beruhet auf einer kurzen Regel, welche alſo heißt: Einerley Zeichen geben **plus**, verſchiedene geben **minus**. Denn entweder ſind die Zeichen verſchieden, oder einerley; ſind ſie verſchieden, ſo iſt klar, daß das Produkt negativ werden muß; das iſt, $+4 . -3 = -3.4$, und $-3 . +4 = -4.3$. weil nach §. 18. —3 in —12 ſo oft enthalten ſeyn muß, als +1 in +4. Sind aber die Zeichen einerley, ſo iſt das Produkt poſitiv; welches bey zween poſitiven Faktorn klar genug iſt, dann $+3 . +4 = +12$;

$+ 12$; aber eben ſo klar wird es auch bey negativen, wenn man nur bedenkt, daß der eine Faktor ſo oft im Produkt enthalten ſeyn muß, als die Einheit im andern Faktor enthalten iſt. Es ſteckt aber nicht die poſitive Einheit oder $+ 1$, ſondern das Gegentheil der $+ 1$ in dem einen negativen Faktor; alſo muß auch das Gegentheil des andern negativen Faktors, das iſt $+$ im Produkt ſtecken; folglich muß das Produkt das Zeichen **plus** haben. Z. E. $- 3 . - 4 = + 12$; weil das Gegentheil von $+ 1$, das iſt $- 1$ in $- 3$ dreymal ſteckt, folglich auch das Gegentheil der $- 4$, das iſt $+ 4$ in 12 dreymal ſtecken muß, welches nicht geſchehen könnte, wenn 12 negativ wäre.

§. 144. Anmerk. Dieſen Beweis hat Herr Prof. Käſtner gegeben, und ich erinnere mich nicht, ihn irgendwo ſonſt geleſen zu haben. Man hat auch einen Beweis per indirectum aus der Geometrie, den man ſonſt zur Erläuterung beybringt. Wenn die ganze Seite eines Rektanguli (Fig. I.) in die Länge a und in die Breite c heißt, und es werden zwey kleinere Parallelogramme abgeſchnitten, davon die Seiten des einen b des andern d ſind; und man verlangt das Rektangulum ABCD, ſo wird es $(a - b) . (c - d) = ac - bc - cd + db$; nämlich das kleine Rektangulum CE $=$ db iſt wieder bey bc und cd abgezogen worden, alſo einmal zuviel, man muß es alſo wieder addiren, folglich wird $- b . - d = + db$. wie unter andern auch aus §. 140. erhellet.

§. 145. Anmerk. Wir haben die Regeln der Multiplikation erwieſen, dahero noch übrig iſt, daß wir ſie mit Exempeln erläutern. Es giebt zween Fälle; denn entweder beſtehet der Multiplikator nur aus einem Buchſtaben oder Zahlzeichen, oder aus mehreren, die durch das Zeichen $+$ oder $-$ verbunden ſind. Der erſte Fall iſt leicht: wenn man nur die Regeln beobachtet;

$a - x$	$a - b + 3d$
x	$- b$
$ax - xx$	$- ab + bb - 3db$;

$a . x$ iſt ax, $+ x$ mit $- x$ iſt $- xx$; ferner $+ a$ mit $- b$ iſt $- ab$, $- b$ mit $- b$ iſt $+ bb$ u. ſ. w.

Der II. Fall, wenn beyde Faktors aus mehr Buchſtaben beſtehen, ſie mögen einerley oder verſchieden ſeyn.

1. Ex.

1. Ex.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab \\ \quad + ab + bb \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

oder $a^2 + 2ab + b^2$

2. Ex.

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline aa - ab \\ \quad - ab + bb \\ \hline aa - 2ab + bb \end{array}$$

oder $a^2 - 2ab + b^2$

3. Ex.

$$\begin{array}{l} a - b \\ a + b \\ \hline aa - ab \\ \quad + ab - bb \\ \hline aa - bb \end{array}$$

Zuerſt multiplizirt man die obige Reihe ganz mit a, $a . a = aa$, $a . b = ab$; hernach mit b, $b . a = ab$, man ſchreibt es unter die erſte Reihe, um die Addition zu erleichtern, (man könnte es auch in gerader Linie fortſchreiben) ferner $b . b = bb$; dieſe zwey Partialprodukte addire man zuſammen, da dann die erſte Reihe $aa + 2ab + bb$, oder nach §. 142. die zweyte Reihe a^2 u. ſ. w. herauskömmt; welches der allgemeine Ausdruck aller Quadratzahlen iſt. Weil überall die Zeichen + vorkommen, ſo hat das Produkt auch dieſe Zeichen. Im 2. Ex. wird abermal die erſte Reihe ganz mit a, hernach mit $- b$ multiplizirt; $a . a = aa$, $a . - b = - ab$; ferner $- b . + a = - ab$, und $- b . - b = + bb$. Abermal ein vollkommenes Quadrat, wo die Wurzel $a - b$ iſt. Im dritten Exempel wird die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplizirt; das Produkt iſt die Differenz der Quadrate. Denn $a . a = aa$, $a . - b = - ab$, ferner $+ b . + a = + ab$, $+ b . - b = - bb$; wenn man nun die Partialprodukte addirt, ſo heben ſich $- ab$ und $+ ab$ auf, und der Reſt $aa - bb$ giebt das verlangte Produkt.

§. 146. **Zuſatz.** $(a + b) . (a + b)$ oder $(a - b) . (a - b)$ giebt immer ein Quadrat, und man kann für $a^2 + 2ab + b^2$ den erſten, und für $a^2 - 2ab + b^2$ den zweyten Werth und umgekehrt ſetzen.

§. 147. **Zuſatz.** Wenn in der Rechnung $a^2 - b^2$ vorkömmt, ſo kann man jedesmal $(a - b) . (a + b)$ dafür ſetzen, und auch umgekehrt; wie es die Schicklichkeit erfordert.

§. 148.

148. Zuſatz. Für den Ausdruck $ax - xx$ läßt ſich $(a - x).x$ und umgekehrt, wie auch für $x - xx$ der Ausdruck $(1-x).x$ ſetzen; denn wenn man wirklich multiplizirt, ſo kömmt $x - xx$ heraus.

§. 149. Anmerk. Dieſe Zuſätze hat man deßwegen ſich bekannt zu machen, weil es gar oft zu geſchehen pflegt, daß man durch die Zerfällung des Produkts in ſeine Faktoren in der Buchſtabenrechnung manche Vortheile erhält, die man ſonſt vergeblich ſucht; man muß dahero eine Fertigkeit in ſchneller Erfindung der Faktoren zu bekommen ſuchen (*).

(*) Die geſchickte Zerfällung der Produkte in ihre Faktoren iſt oft umumgänglich nöthig, wenn Gleichungen in eine Proportion aufgelöſet werden müſſen. Folgende Regeln könnten von einigem Nutzen ſeyn:

I. Jede Größe hat zu ſeinem Faktor 1; ſo iſt $x = 1.x$.

II. Wenn das Produkt eine gebundene Größe iſt, ſo iſt jener Buchſtabe ein Faktor, der jedem ihrer Theilen gemeinſchäftlich iſt, z. B. $ag - bg = (a - b)g$; und $nd - d = (n - 1)d$.

III. Die Differenz zweyer Quadraten iſt ein Produkt zwoer gleichnamigen Größen, deren eine aber ein entgegengeſetztes Zeichen hat; z. B. $a^2 - b^2$ iſt das Produkt von $(a+b).(a - b)$; $1 - x^2 = (1+x).(1 - x)$ ꝛc. wovon aber weiter unten etwas vorkommen wird.

IV. Zuweilen kann auch ein Produkt in zween unmögliche Faktoren zerfället werden, wie (§. 721. Trigonom.) ein Beyſpiel vorkommen wird.

§. 150. Willk. Satz. In der Diviſion werden die Buchſtaben, die durch die Multiplikation verbunden ſind, wieder getrennet, woſern der Diviſor einerley mit einem oder dem andern Faktor des Dividendus iſt; z. E. $\frac{ab}{a} = b$, denn a

in

in a iſt einmal enthalten, folglich kömmt in den Quotienten b; $\frac{abc}{bc} = a$, $ag : a = g$ u. ſ. w. Sind aber Diviſor und Dividendus ganz verſchieden, ſo wird die Diviſion entweder bloß angezeigt, z. E. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $g : a$; oder wie wir unten zeigen werden, wird der Quotient in einer unendlichen Reihe von Brüchen durch Näherung geſucht, wenn der Diviſor zuſammengeſetzt iſt, z. E. $\frac{a}{b + c}$ oder $\frac{a}{b - c}$.

§. 151. **Lehrſatz.** Die Regel der Diviſion in Rückſicht auf die Zeichen, iſt eben dieſelbe, die bey der Multiplikation ſtatt hatte; nämlich einerley Zeichen geben plus, verſchiedene geben minus. Der Beweis iſt der nämliche, den wir bey der Multiplikation gegeben haben §. 143.

§. 152. Die Sache wird ſich durch Exempel erläutern laſſen; es giebt zwey Fälle, wenn die Größen einer Art ſind; der Diviſor beſteht entweder aus einem oder aus mehr durch + und — verbundenen Buchſtaben. Das einzelne kann auch ein Produkt, z. E. ab ſeyn. I. Fall, wenn der Diviſor einzeln iſt: man dividirt, wie in den Zahlen unter ſich, und ſagt, a in ab iſt bmal enthalten; der Quotient bekömmt b; mit dem Quotienten wird der Diviſor a multiplizirt, a . b iſt ab, dieſes Produkt von dem Dividendus ſubtrahirt, läßt — ac, das man herabſetzt; der Diviſor wird wieder unterſchrieben; + a in — ac iſt — cmal enthalten, weil verſchiedene Zeichen — geben; der Quotient bekömmt alſo — c, dieſer Quotient wird mit dem Diviſor multiplizirt — c . + a giebt — ac, das Produkt von dem Dividendus abgezogen läßt + ad; der Diviſor a wird wieder unterſchrieben; a in ad giebt + d, weil es einerley Zeichen ſind; a . d = ad, dieß von dem Dividendus ſubtrahirt läßt nichts, alſo hat man den Quotienten genau gefunden.

$$
\begin{array}{l|l}
ab - ac + ad & b - c + d \\
(a) & \\
-ab & \\
\hline
\quad -ac + ad & \\
\quad (a) & \\
\quad +ac & \\
\hline
\qquad +ad & \\
\qquad (a) & \\
\qquad -ad &
\end{array}
$$

II. Fall.

II. Fall. Wenn der Diviſor nicht einzeln iſt, da es abermal wie in der obigen Diviſion heißt, a in aa iſt enthalten amal; der Quotient bekömmt a; mit dieſem Quotienten wird der ganze Diviſor multiplizirt, a . a = aa, und + a . + b = + ab, das Produkt aa + ab wird wieder von dem Dividendus ſubtrahirt, man verwechſelt alſo die Zeichen nach §. 139. und addirt, — aa + aa heben ſich auf, — ab und — bb bleiben übrig; dieſer Reſt wird wieder durch a + b dividirt, a in — ab iſt — b mal enthalten, — b . + a iſt — ab; — b . + b iſt — bb, dieß Produkt vom Dividendus abgezogen, geht auf, und läßt nichts.

$$
\begin{array}{l}
aa - bb \mid a - b \\
(a + b) \\
aa + ab \\
- \quad - \\
\hline
- ab - bb \\
(a + b) \\
- ab - bb \\
+ \quad + \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
aa - bb - 2ac + cc \mid a + b - c \\
(a - b - c) \\
aa - ab - ac \\
- \quad + \quad + \\
\hline
+ ab - bb - ac + cc \\
(a - b - c) \\
ab - bb - bc \\
- \quad + \quad + \\
\hline
- ac + bc + cc \\
(a - b - c) \\
- ac + bc + cc \\
+ \quad - \quad - \\
\hline
0
\end{array}
$$

Eben ſo wird das andere Exempel gerechnet, a in aa iſt enthalten amal, der Quotient a wird mit dem ganzen Diviſor multiplizirt, und giebt das Produkt aa—ab—ac, dieſes von dem Dividendus abgezogen, läßt, wenn die Zeichen verändert werden + ab — bb — ac + cc; der Diviſor wird abermal unterſchrieben; a in ab, bmal; der Quotient + b mit dem Diviſor multiplizirt, giebt das Produkt ab — bb — bc, dieß von dem Dividendus ſubtrahirt, läßt — ac + bc + cc; der Diviſor noch einmal unterſchrieben giebt den Quotienten — c, das Produkt aus — c in den Diviſor vom Dividendus abgezogen, läßt nichts.

§. 153. Zuſatz. Aus dem Bisherigen wird man alſo leicht verſtehen, wie man eine einzelne Größe durch einen

zuſammengeſetzten Diviſor dividiren, und den Quotienten durch Näherung bekommen ſolle; eine Lehre, die beſonders zu merken iſt, weil ſie in der Summirung der Reihen uns zu ſtatten kömmt. Z. E. Man ſolle 1 durch $1 - x$ dividiren.

$$1 \;\big|\; 1 + x + xx + xxx \;\&c.$$
$$(1 - x)$$
$$1 - x$$
$$- \quad +$$
$$\overline{+ \; x}$$
$$(1 - x)$$
$$x - xx$$
$$- \quad +$$
$$\overline{+ \; xx}$$
$$(1 - x)$$
$$xx - xxx$$
$$- \quad +$$
$$\overline{+ \; xxx}$$

Da es heißt, 1 in 1 iſt enthalten 1 mal; der Quotient 1 multiplizirt in den Diviſor $1-x$ giebt das Produkt $1-x$, dieß von dem Dividendus abgezogen läßt $+x$, wenn man die Zeichen verändert und addirt; der Diviſor wieder unterſchrieben, giebt den Quotienten x, denn 1 in x iſt $x$mal enthalten; der Quotient in den Diviſor multiplizirt giebt $x - xx$, dieß von dem Dividendus x abgezogen, läßt $+xx$ u. ſ. w.

Die Buchſtabenrechnung in Brüchen.

§. 154. **Lehrſatz.** Die Brüche werden in der Buchſtabenrechnung eben ſo behandelt, wie in der Zahlenrechnung; man bringt ſie unter einerley Benennung, man addirt, ſubtrahirt, multiplizirt und dividirt nach eben den Regeln, die wir §. 54. folgg. gegeben; denn die daſelbſt vorgetragene Beweiſe ſind allgemeine Beweiſe, die alſo auch insbeſondere die Buchſtabenrechnung erläutern.

§. 155.

§. 155. **Zuſatz.** Man bringt alſo Brüche unter einerley Benennung, wie §. 57. Denn $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{g} = \frac{adg}{bdg} + \frac{cbg}{bdg} + \frac{ebd}{bdg}$; man addirt und ſubtrahirt ſie, wenn man nach geſchehener Reduktion unter einerley Benennung Zähler zu Zählern addirt, oder Zähler von Zählern ſubtrahirt. Z. E. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, $\frac{a}{d} + \frac{f}{g} = \frac{ag + fd}{dg}$; und $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$.

§. 156. **Lehrſatz.** Die Multiplikation und Diviſion der Brüche befolgt gleichermaſſen eben die Regeln, die §. 65. und 70. vorkommen.

Der I. Satz iſt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Der II. Satz $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Bew. (I.)

Es ſey $\frac{a}{b} = m \quad .b$ $\qquad \frac{c}{d} = n \quad .d$

$a = bm \qquad c = dn$

$c = dn$

$ac = bd \cdot mn \quad :bd$

$\frac{ac}{bd} = mn.$

Bew. (II.)

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd}$

$\frac{ad}{bd} \cdot \frac{cb}{bd} = \frac{ad}{bd} \cdot \frac{bd}{cb} = \frac{abdd}{bbcd} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$

§. 157. **Zuſatz.** Einen Bruch, deſſen Nenner zuſammengeſetzt iſt, z. E. $\frac{a}{b + c}$ dividirt man wirklich, wenn man nach §. 152. und 153. die Operation anſtellt, und den Quotienten durch Näherung ſucht.

$$
\begin{array}{l}
(b+c)\;a \;\Big|\; \frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb}\ \&c. \\
\quad a + \frac{ac}{b} \\
\quad - \quad - \\
\hline
\quad -\frac{ac}{b} \\
\quad (b+c) \\
\quad -\frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb} \\
\quad + \quad + \\
\hline
\qquad +\frac{acc}{bb} \\
\qquad (b+c) \\
\qquad +\frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb} \\
\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\quad -\frac{accc}{bbb}
\end{array}
$$

Denn b iſt in a enthalten $\frac{a}{b}$ mal, der Quotient heißt alſo $\frac{a}{b}$, dieſer Quotient mit b+c multiplizirt, giebt nach §. 67. $\frac{ab}{b}+\frac{ac}{b}$ das iſt $a+\frac{ac}{b}$, das Produkt vom Dividendus ſubtrahirt, läßt, weil a von a aufgeht, nach Veränderung der Zei. $-\frac{ac}{b}$; der Diviſor wird wieder unterſchrieben; b in $-\frac{ac}{b}$ giebt nach §. 72. im Quotienten $-\frac{ac}{bb}$, dieſer Quotient mit dem Diviſor multiplizirt, giebt das Produkt $-\frac{acb}{bb}\ -\frac{acc}{bb}$, das iſt $-\frac{ac}{b}\ -\frac{acc}{bb}$, welches von dem Dividendus $-\frac{ac}{b}$ abgezogen, läßt $+\frac{acc}{bb}$ u. ſ. w. Wo man aufhört, wird der Reſt, als ein Bruch, wie in der Diviſion §. 49. zum Quotienten addirt.

§. 158. **Zuſatz.** Die obige Reihe kürzer ausgedrückt iſt $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5}$ u. ſ. w.

§. 159. **Zuſatz.** Wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$, ſo iſt $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. ſ. w.

§. 160.

§. 160. **Anmerk.** Dieſes aber iſt nicht ſo zu verſtehen, als ob eine unendliche Reihe Nullen $= \frac{1}{2}$, wenn die Anzahl $1 - 1 + 1 - 1$ u. ſ. w. gleich, oder, wenn ſie ungleich iſt, $1 = \frac{1}{2}$ wäre; denn ſie iſt weder gleich noch ungleich; ſondern unendlich, das iſt, die Diviſion muß immer fortgeſetzt werden, oder wenn man abbricht, ſo muß man den Reſt, den man in der Diviſionsoperation noch hat, zum Quotienten mit ſeinem Diviſor als einen Bruch addiren, da dann jedesmal herauskommen wird, daß $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. **Guido Grandus** hat ſich hierinnen geirret, wenn er aus dieſer Operation geſchloſſen, unendlich viel Nullen geben eine poſitive Größe, nämlich $\frac{1}{2}$. Er wollte damit die Schöpfung aus Nichts erklären.

§. 161. **Zuſatz.** Wenn $a = 1$ und $c = 1$. und $b = 2$, ſo iſt $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. ſ. w.

§. 162. **Lehrſatz.** Woferne man ſtatt des Diviſors $b + c$ den Diviſor $b - c$ ſetzt, ſo iſt der Quotient $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5}$ u. ſ. w. und die Zeichen wechſeln nicht wie §. 157. ab; die Operation iſt eben dieſelbe; dahero wir ſie hier nicht ausführlich wie §. 157. herſetzen.

§. 163. **Zuſatz.** Wenn in §. 162, $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$, ſo iſt $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. ſ. w. alſo $= \infty$.

§. 164. **Zuſatz.** Wenn $a = 1$, und $c = 1$, und $b = 2$, ſo iſt $\frac{1}{2-1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. ſ. w.

§. 165. **Zuſatz.** Wenn $a = 1$, und $b = 1$, ſo iſt nach der Reihe §. 158. der Ausdruck $\frac{1}{1 + c}$, oder wenn man für $c = x$ ſetzt, $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ u. ſ. w. Ferner wenn b bleibt, oder $= x$ geſetzt, und $c = 1$, ſo iſt $\frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$; folglich ſind die zwo Reihen einander gleich, das iſt, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$ u. ſ. w.

§. 166. **Anmerk.** Dieſe Veränderungen der Reihen ſind aus dem, was hier vorgetragen wurde, leicht verſtändlich; das weitere wird unten vorkommen, wenn wir von Summirung der Reihen und Progreſſionen reden werden.

Von den Potenzen oder Dignitäten und ihren Veränderungen.

§. 167. **Erklär.** Wenn man eine Größe mehrmalen mit ſich ſelbſt multiplizirt, ſo heißt das Produkt die Potenz oder Dignität; oder ein Produkt aus lauter gleichen Faktorn iſt eine Potenz, der einfache Faktor iſt die Wurzel, die Menge aller gleichen Faktorn heißt der Grad oder der **Exponent** der Potenz, welcher anzeigt, wie vielmal die gegebene Größe mit ſich ſelbſt multiplizirt worden; und dieſer **Exponent** wird mit einer kleinen Ziffer, oberhalb des Faktors zur Rechten, geſchrieben. Das Produkt von zween gleichen Faktoren heißt ein Quadrat, das von dreyen Kubus, das von mehrern die 4te, 5te Potenz u. ſ. w. das Wurzelzeichen iſt bekannt. Z. E. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$; 5^4 iſt die Potenz, 5 iſt die Wurzel; 4 der Exponent. $6 . 6 = 6^2$, und $6 = \sqrt{6^2}$; $4 . 4 . 4 = 64 = 4^3$, und $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 168.

§. 168. **Zuſatz.** Wenn die Wurzel ein Bruch iſt, ſo iſt auch das Quadrat oder die Potenz überhaupt ein Bruch, weil man, wenn ein Bruch mit einem Bruch multiplizirt wird, Zähler mit Zählern und Nenner mit Nennern multiplizirt, oder $\frac{2}{3} . \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$, oder überhaupt $\frac{a}{b}$ zur nten Potenz erhoben $= \frac{a^n}{b^n}$.

§. 169. **Zuſatz.** Eben ſo iſt die Wurzel aus einem Bruch wieder ein Bruch, deſſen Zähler die Wurzel des Zählers, und der Nenner die Wurzel des Nenners iſt. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$; $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b}$.

§. 170. **Zuſatz.** Das Quadrat eines eigentlichen und auch uneigentlichen Bruchs, der ſich durch den Nenner nicht ganz dividiren läßt, iſt keine ganze Zahl; denn es ſey der Bruch $\frac{u}{x}$, ſo iſt ſein Quadrat $\frac{uu}{xx}$; wenn nun dieſes Quadrat eine ganze Zahl wäre, z. E. p, ſo wäre $\frac{uu}{xx} = p$, und $\frac{uu}{x} = px$; folglich müßte $\frac{uu}{x}$ eine ganze Zahl ſeyn, alſo u durch x ſich dividiren laſſen, oder x müßte ein Faktor von uu ſeyn, welches aber kraft der Hypotheſe nicht ſeyn kann.

§. 171. **Zuſatz.** Eben ſo kann auch der Kubus eines ſolchen Bruchs keine ganze Zahl ſeyn, u. ſ. w.

§. 172. **Zuſatz.** Wenn die Potenzen keine ganze Zahlen ſind, ſo ſind es auch die Wurzeln nicht.

§. 173. **Zuſatz.** Wenn eine gegebene Wurzel gröſſer als eine ganze Zahl, aber doch zugleich kleiner als eben die um eins vermehrte ganze Zahl iſt, das iſt, wenn ſie zwiſchen x und $x + 1$ hineinfällt, und x eine ganze Zahl bedeutet, ſo giebt es keinen Bruch, der die Wurzel genau ausdrückte, ſondern man muß durch die Approximation oder Näherung dem wahren Werth, den man nie ganz bekömmt, ſo nahe zu kommen ſuchen, daß der Fehler unmerklich wird.

§. 174. **Anmerk.** Man ſieht hieraus, warum man bey den angehängten Nullen in Ausziehung der Quadrat- und Kubikzahlen niemalen die Wurzel ganz bekömmt. Denn der Zöbler iſt die Wurzel aus einem eigentlichen Bruch; er kann dahero niemal eine ganze Zahl werden, §. 172. folglich muß man ſich der wahren Wurzel nur nähern.

§. 175. **Lehrſatz.** Man kann die Potenzen addiren, ſubtrahiren, multipliziren und dividiren. Denn entweder ſind ſie gleichnamig, oder nicht; ſind ſie nicht gleichnamig, ſo geſchehen die vier Rechnungsarten mit den Zeichen, davon wir ſchon geredet haben. Denn a^3 zu b^2 addirt iſt $a^3 + b^2$, ſubtrahirt $a^3 - b^2$, multiplizirt $a^3 b^2$, und dividirt $a^3 : b^2$ oder $\frac{a^3}{b^2}$; ſind ſie aber gleichnamig, ſo wird die Addition und Subtraktion wie in Zahlen verrichtet; $3a^3 + a^3 = 4a^3$, $3a^3 - a^3 = 2a^3$. Was aber die Multiplikation und Diviſion betrift, ſo bemerkt man folgende Regeln:

I. Bey der Multiplikation der gleichnamigen Potenzen werden die Exponenten addirt, und die Summe iſt das Produkt.

Denn $a^3 . a^2 = aaa . aa$

$$aaa . aa = aaaaa$$

$$aaaaa = a^5$$

$$a^3 . a^2 = a^5$$

Es

Es iſt aber $a^5 = a^{3+2}$
$\overline{a^3 . a^2 = a^{3+2}}$ folglich iſt

Wenn man alſo die Exponenten 3 und 2 addirt, ſo hat man das Produkt von $a^3 . a^2 = a^5$.

II. Bey der Diviſion wird der Exponent des Diviſors von dem Exponenten des Dividendus ſubtrahirt, die Differenz iſt der Quotient.

Dann $a^5 : a^3 = \frac{aaaaa}{aaa}$

$$\frac{aaaaa}{aaa} = aa$$

$$\underline{. \; aa = a^2}$$

$$a^5 : a^3 = a^2$$

$$a^2 = a^{5-3}$$

$$a^5 : a^3 = a^{5-3}$$

Folglich bekömmt man den Quotienten, wenn man den Exponenten des Diviſors vom Exponenten des Dividendus ſubtrahirt.

§. 176. **Zuſatz.** Wenn die Exponenten allgemeine Zeichen wie *m* und *n* ſind, ſo iſt $x^m . x^n = x^{m+n}$ und $x^m : x^n = x^{m-n}$.

§. 177. **Zuſatz.** Eine Gröſſe, die unverändert bleibt, und nicht mit ſich ſelbſt multiplizirt wird, läßt ſich alſo durch x^1ausdrücken; zuweilen hat man einen Nutzen, wenn man die 1 ſetzt, z. E. $x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1$; meiſtentheils aber läßt man die Einheit weg, und ſchreibt für x^1 nur x. Das iſt x in der erſten Potenz.

§. 178. **Lehrſatz.** Eine Potenz, deren Exponent Nulle iſt, iſt allzeit eins; $x^0 = 1$; denn

$$x^0 = x^{1-1}$$
$$x^{1-1} = x^1 : x^1$$
$$x^1 : x^1 = x : x = \frac{x}{x}$$
$$\frac{x}{x} = 1$$

$$x^0 = 1.$$

Die Gröſſe mag alſo ſeyn, was ſie für eine will, wenn ihr Exponent $= 0$, ſo iſt ſie $= 1$. Z. E. $a^0 = 1$, $b^0 = 1$, u. ſ. w. alſo $1, \frac{x}{x}, x^0$ ſind einerley Ausdrücke, und alle einander gleich.

§. 179. **Zuſatz.** Wenn des Diviſors Exponent gröſſer iſt als der Exponent des Dividendus, ſo wird der Exponent des Quotienten negativ; z. E. $x^2 : x^5 = x^{2-5} = x^{-3}$.

§. 180. **Zuſatz.** Eine Potenz, die einen negativen Exponenten hat, iſt einem Bruch gleich, deſſen Zähler eins, und deſſen Nenner die nämliche Potenz mit dem poſitiven Exponenten iſt. Denn $x^0 = 1$ §. 178. folglich $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, und überhaupt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; dahero x^{-n} und $\frac{1}{x^n}$ gleichgültige Ausdrücke ſind *).

*) Vielleicht iſt folgender Beweis den Anfängern deutlicher.

Nach §. 179. iſt $\frac{x^2}{x^3} = x^{2-3} = x^{-1}$

Es iſt aber

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{xx}{xxx}$$
$$\frac{xx}{xxx} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

§. 181.

§. 181. **Anmerk.** Im folgenden werden wir beweiſen, daß es auch Dignitäten gebe, deren Exponenten Brüche ſind, welche nach eben dieſen Regeln behandelt werden.

§. 182. **Zuſatz.** Zuſammengeſetzte Potenzen werden auf eben dieſe Weiſe behandelt; denn $a^2x^3 . ax = a^3x^4$, weil $aaxxx . ax = aaaxxxx = a^3x^4$; alſo $x^ny^m . xy = x^{n+1} y^{m+1}$; und $a^2x^3 : ax = ax^2$.

§. 183. **Zuſatz.** Wenn der Exponent unbeſtimmt iſt, ſo iſt aus gleichem Grunde $x^n . x^2 = x^{n+2}$, und $x^n . x = x^{n+1}$, und $x^n : x = x^{n-1}$.

§. 184. **Lehrſatz.** Potenzen laſſen ſich zu höhern Graden erheben, wenn man ihre Exponenten mit dem Exponenten des verlangten Grads multiplizirt; denn a^3 zum vierten Grad erhoben, iſt nichts anders als a^3 viermal mit ſich ſelbſt multiplizirt, nun aber iſt $a^3 . a^3 . a^3 . a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ nach §. 176. Eine Zahl aber etlichmal zu ſich ſelbſt addiren, heißt ſie multipliziren; folgeich darf man nur den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten des verlangten Grads multipliziren, ſo hat man die geſuchte Potenz. $a^{3.4} = a^{12}$ der vierte Grad von a^3.

§. 185. **Zuſatz.** Im allgemeinen Ausdruck wird dahero auch ſeyn der nte Grad von $x^m = x^{mn}$.

§. 186. **Zuſatz.** Sind die Potenzen zuſammengeſetzt, ſo iſt aus gleichem Grunde der dritte Grad von $x^2y^3 = x^6y^9$; und der nte Grad von $x^my^r = x^{mn}y^{nr}$.

§. 187. **Zuſatz.** Auch bey negativen Gröſſen bleibt die Regel; denn x^{-2} im 3ten Grad $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ (*) und z^{-m} im nten Grad iſt $z^{-mn} = \frac{1}{z^{nm}}$. nach §. 180.

§. 188.

(*) Denn $(x^{-2})^3 = \left(\frac{1}{x^2}\right)^3$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 = \left(\frac{1^1}{x^2}\right)^3 = \frac{1^3}{x^{2.3}} = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$$

alſo

$(x^{-2})^3 = x^{-6}$.

§. 188. **Lehrſatz.** Die Wurzel aus einer Potenz läßt ſich ausziehen, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt. Denn $\sqrt[3]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^{4\cdot3}}$, wie nun x^{12} entſteht, wenn man x^4 dreymal mit ſich ſelbſt multiplizirt, ſo muß x^4 die Kubikwurzel aus x^{12} wieder herauskommen, wenn man $x^{12} = x^{4\cdot3}$ wieder mit 3 dividirt.

§. 189. **Zuſatz.** Allgemein iſt dahero auch $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; und bey zuſammengeſetzten Gröſſen $\sqrt[3]{x^4y^2} = x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

§. 190. **Zuſatz.** Hieraus erhellet zugleich, daß es Potenzen gebe, deren Exponenten Brüche ſind; $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$; auch negative, z. E. $\sqrt[7]{x^{-3}} = x^{\frac{-3}{7}}$.

§. 191. **Zuſatz.** Um eine Wurzel ſchicklicher auszudrücken, darf man ſie nur wie §. 189. folgg. ſetzen; $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, und $\sqrt[r]{x^{n+m}} = x^{\frac{n+m}{r}}$, und $\sqrt[n+m]{x^r} = x^{\frac{r}{n+m}}$ ſind gleichgültige Ausdrücke.

§. 192. **Zuſatz.** Weil bey zuſammengeſetzten Gröſſen $\sqrt[2]{x^4y} = x^{\frac{4}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, und allgemein $\sqrt[n]{x^my^r} = x^{\frac{m}{n}}y^{\frac{r}{n}}$; ſo laſſen ſich ſolche Wurzeln einfacher ausdrücken, wenn man aus dem einen Faktor die Wurzel wirklich ausziehen kann; denn $\sqrt[m]{a^mb} = a^{\frac{m}{m}}b^{\frac{1}{m}} = a^1\,.\,b^{\frac{1}{m}} = a\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[n]{x^nb^r} = x^{\frac{n}{n}}b^{\frac{r}{n}} = x\,.\,\frac{r}{n} = x\sqrt[n]{b^r}$.

§. 193. **Zuſatz.** Sind alſo hinter dem Wurzelzeichen Zahlen, ſo muß man die Zahl in ihre Faktoren geſchickt und ſo zerfällen, daß eine ein vollkommenes Quadrat oder Kubus u. ſ. w. wird, je nachdem man ein Quadrat oder Ku-

Kubikwurzel u. ſ. w. verlangt. Z. E. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8.6} = 2\sqrt[3]{6}$.

§. 194. **Lehrſatz.** Man kann verſchiedene Wurzelgröſſen unter einerley Benennung bringen, und hernach addiren, ſubtrahiren, multipliziren und dividiren, wenn man die Wurzelgröſſen als eine Potenz ausdrückt, deren Exponent ein Bruch iſt, und hernach die beyde Brüche wie §. 155. unter einerley Benennung bringt. Denn $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{y^s}$ bekommen einerley Benennung auf folgende Weiſe

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}},\ \sqrt[r]{y^s} = y^{\frac{s}{r}}$$

da nun nach §. 57. $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{nr}{mr}},\ y^{\frac{s}{r}} = y^{\frac{ms}{mr}}$

ſo iſt folglich $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[mr]{x^{nr}}$ und $\sqrt[r]{y^s} = \sqrt[mr]{y^{ms}}$

das iſt, beyde Brüche haben einerley Benennung; ſie laſſen ſich dahero addiren und ſubtrahiren durch Zeichen; multipliziren und dividiren durch die wirkliche Multiplikation und Diviſion der Gröſſen hinter dem Wurzelzeichen; denn $\sqrt[mr]{x^{nr}} . \sqrt[mr]{y^{ms}} = \sqrt[mr]{x^{nr} y^{ms}}$; u. ſ. w.

§. 195. **Zuſatz.** In Zahlen giebt es zuweilen ſchicklichere Ausdrücke nach §. 193. bey der Addition und Subtraktion, $\sqrt{63} + \sqrt{28} = \sqrt{9 \cdot 7} + \sqrt{4 \cdot 7} = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (3 + 2)\sqrt{7}$.

§. 196. **Zuſatz.** Sind vor dem Wurzelzeichen noch Zahlen, ſo werden ſie mitſammen multiplizirt. Z. E. $3\sqrt{2} . 2\sqrt{7} = 3 . 2\sqrt{2 . 7} = 6\sqrt{14}$. Sind die Wurzelgröſſen zuſammengeſetzt, ſo verfährt man wie §. 145.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{9}+\sqrt{6}$$
$$\qquad\qquad -\sqrt{6}-\sqrt{4}$$
$$\overline{\sqrt{9}-\sqrt{4} = 3 - 2 = 1.}$$

Eben

Eben ſo macht man es bey der Diviſion; denn $\frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$.

§. 197. **Anmerk.** Aus der Lehre der Potenzen läßt ſich nun die vorgetragene Lehre von Dezimal- und Sexageſimalbrüchen allgemein erweiſen. Denn ein Dezimalbruch kann als eine Potenz der 10 mit einem negativen Exponenten angeſehen werden; denn $\frac{1}{1000000} = 10^{-6}$ und $\frac{5}{1000000} = 5 \cdot 10^{-6}$. Oder allgemein $a \cdot 10^{-n}$ und $b \cdot 10^{-m}$; wenn man nun dieſe zween Brüche mit einander multiplizirt, ſo heißt das Produkt nach der Regel, §. 175. $ab \cdot 10^{-n-m}$, und wenn man den erſten durch den andern dividirt, ſo heißt der Quotient $\frac{a}{b}\, 10^{-n+m}$; welches die ſchon vorgetragene Lehre der Dezimal- und Sexageſimalrechnung nicht nur erläutert, ſondern auch für alle nur mögliche Fälle erweiſet.

§. 198. **Lehrſatz.** Man mag die Zahl Zwey zu einer Potenz erheben, zu was für einer man immer will, ſo wird allemal die Potenz von 2 gröſſer ſeyn als der Exponent. Der Exponent ſey m, und m = 1. ſo iſt vorhin klar, daß, weil $2^1 > 1$ auch $2^m > m$. Nun multiplizire man mit 2.

$$2^m \cdot 2 > 2m$$

$$2^m \cdot 2 = 2^{m+1}$$ nach §. 183.

ſo iſt $2^{m+1} > 2m$ Multiplizirt man wieder mit 2, ſo wird abermal 2^{m+2} gröſſer als der Exponent $m+2$ ſeyn u. ſ. w.

Auf dieſe Weiſe ſieht man ſchon, daß, wenn der Exponent $m + 1000$ würde, doch immer die Potenz $2^{m+1000} > m+1000$.

§. 199. **Lehrſatz.** Eine Gröſſe a, die man immer halbirt, und durch 2 ſo dividirt, daß man die Hälfte wieder halbirt, und dieſe Hälfte noch einmal, und ſo immerfort, kann kleiner werden als eine jede angebliche Gröſſe, (quavis data vel aſſignabili minor). Es ſey die gegebene kleinſte Gröſſe c,

ihr

ihr vielfaches mc, ſo daß durch die Multiplikation $mc = a$ werde.

Es iſt alſo I. $a = mc$

$$\overline{} : 2^m$$

$$\frac{a}{2^m} = \frac{mc}{2^m}$$

Nun iſt ferner nach §. 198.

II. $m < 2^m$ folglich

$$\overline{} \cdot c$$

$$mc < 2^m c$$

$$\overline{} : 2^m$$

$$\frac{mc}{2^m} < c$$ und nach nr. I.

$$\frac{mc}{2^m} = \frac{a}{2^m}$$

$$\overline{} ,$$

$$\frac{a}{2^m} < c$$ das iſt: die Gröſſe a wird durch m Halbirungen, das iſt, durch alle Potenzen von 2 dividirt, zuletzt kleiner als die angebliche kleinſte Gröſſe c.

§. 200. Anmerk. Dieſen Beweis hat ſchon Euklides Elem. X. Prop. I. gegeben, und dadurch die Lehre von dem unendlich Kleinen vorgetragen; wir haben ihn nur etwas deutlicher zu machen geſucht, ſo wie man heutzutag die Deutlichkeit in den mathematiſchen Schriften verlanget, oder zu verlangen gewohnt iſt; er iſt von den meiſten übergangen worden, weil ſie glaubten, der Ausdruck quantitas quavis data minor ſeye vorhin klar; allein man muß in der Mathematik keinen Satz annehmen, deſſen Möglichkeit nicht vorher bewieſen iſt. Herr Hofrath Käſtner iſt, ſo viel wir wiſſen, der einzige, der dieſen I. Satz aus dem X. Elem. des Euklides ſeinem mathematiſchen Leſebuch eingerückt hat. Er ſetzt hinzu: „ Dieſer Satz iſt der wahre Grund der Schlüſſe, die „ man jetzo durch Ausdrückungen des unendlich Kleinen abzu„ kürzen pflegt. Analys. finit. §. 47. S. 28. III. Th. der ma„ them. Anfangsgr".

§. 201.

§. 201. **Zuſatz.** Jeder eigentliche Bruch, deſſen Zähler = 1, iſt alſo kleiner als $\frac{1}{2}$, wenn er nicht ſelbſt $\frac{1}{2}$ iſt; und alle Potenzen von $\frac{1}{2}$ ſind kleiner als $\frac{1}{2}$.

§. 202. **Anmerk.** Zu einiger Uebung für die Anfänger, wollen wir einige Exempel von berechneten Potenzen hier anführen; und zwar

I. Die Multiplikation der Potenzen;

$$x^3 \cdot x^n = x^{3+n};\ x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{10}+\frac{4}{10}}$$
$$= x^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{x^9};\ x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{n}{m}} = x^{\frac{m+2n}{2m}}$$
$$= \sqrt[2m]{x^{m+2n}};\ x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = x^{-\frac{3}{12}+\frac{4}{12}}$$
$$= x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}.$$

II. Die Diviſion der Potenzen;

$$y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = y^{\frac{6}{8}-\frac{4}{8}} = y^{\frac{2}{8}} = y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}.$$

Ferner $y^n : y = y^{n-1};\ y^r : y^6 = y^{r-6};\ y^{\frac{1}{2}} : y^{-\frac{2}{3}}$
$$= y^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = y^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = y^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{y^7} = y\sqrt[6]{y}.$$

III. Die Elevation zu Potenzen;

$$z^3 \text{ zur 4 Pot.} = z^{3\cdot 4} = z^{12};\ z^{\frac{1}{3}} \text{ zur 5} = z^{\frac{1}{3}\cdot 5} = z^{\frac{5}{3}}$$
$$= \sqrt[3]{z^5} = z\sqrt[3]{z^2};\ z^{-\frac{1}{2}} \text{ zur Pot. 6} = z^{-\frac{1}{2}\cdot 6} = z^{-\frac{6}{2}}$$
$$= \sqrt[2]{z^{-6}} = \sqrt{\frac{1}{z^6}};\ z^{-\frac{1}{n}} \text{ zur Pot. } \frac{r}{s} = z^{-\frac{1}{n}\cdot\frac{r}{s}} = z^{\frac{1}{s}}$$
$$= z^{-\frac{r}{ns}} = \sqrt[ns]{z^{-r}} = \sqrt[ns]{\frac{1}{z^r}}.$$

IV. Die Ausziehung der Wurzeln;

$$\sqrt[3]{x^9} = x^{\frac{9}{3}} = x^3;\ \sqrt{\frac{1}{x^5}} = \sqrt{x^{-5}} = x^{-\frac{5}{2}}.$$

v. Mit zuſammengeſetzten Potenzen;

$$x^2 y^3 \,.\, x^4 y^{\frac{1}{2}} = x^{2+4} y^{3+\frac{1}{2}} = x^6 y^{\frac{6+1}{2}} = x^6 y^{\frac{7}{2}}$$
$$= x^6 \sqrt{y^7} = x^6 y^3 \sqrt{y};\ z^3 y : z^4 y^2 = z^{3-4} y^{1-2} = z^{-1} y^{-1}$$
$$= \frac{1}{z}\frac{1}{y} = \frac{1}{zy};$$ $a^2 z^4$ elevirt zur nten Potenz; $= a^{2n} z^{4n}$;
$$\sqrt[3]{ax^2} = a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[4]{a^2 b^2} = a^{\frac{2}{4}} b^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn man ſich in dergleichen Formeln nicht fleißig übe, ſo iſt es einem ſchwer, mathematiſche Schriften zu leſen; denn dieſe Regeln werden in den Werken der Kenner vorausgeſetzt.

Die Irrationalwurzeln und eingebildeten oder unmöglichen Größen.

§. 203. **Erklär.** Eine Irrationalwurzel iſt diejenige, die ſich nicht genau angeben oder ausziehen läßt; z. E. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$ u. ſ. w.

§. 204. **Anmerk.** Der Name Irrational hängt von dem lat. Wort ab, das Rechnen bedeutet, nicht aber von dem, das im Deutſchen Vernunft heiſſet; eine irrationale Größe iſt alſo nach der wörtlichen oder lexikographiſchen Bedeutung diejenige, die nicht ausgerechnet werden kann, wenn man auch ohne Ende immerfort rechnete, und die Wurzel auszöge. So kann man $\sqrt{2}$, wenn man viele 1000 Jahr in einem fortrechnete, niemalen genau und ohne einigem Fehler finden. Nach §. 173.

§. 205. **Zuſatz.** Wenn die Zahl hinter dem Wurzelzeichen ſich in ſolche Faktoren zerfällen läßt, davon einer die Potenz iſt, deren Wurzel man verlangt, ſo kann man die Irrationalzahl zum Theil von ihrer Irrationalität befreyen. Z. E. $\sqrt{18} = \sqrt{9\,.\,2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8\,.\,5} = 2\sqrt[3]{5}$.

§. 206. **Zuſatz.** Irrationalgröſſen, wenn ſie nicht ganz irrational ſind, können alſo eine endliche oder rationale Verhältniß haben. Z. E. $3\sqrt{2} : 6\sqrt{2} = 3 : 6$.

§. 207. **Lehrſatz.** Wenn das Quadrat einer Irrationalzahl rational iſt, ſo ſind alle gerade Potenzen rational, und alle ungerade irrational. Man ſetzt voraus, daß eine gerade ganze Zahl diejenige ſey, die ſich durch zwey genau und ſo dividiren laſſe, daß ſie aufgeht; welches Anfängern, ja Kindern bekannt iſt; wenn nun n eine ganze Zahl iſt, ſo iſt 2n jedesmal eine gerade ganze Zahl; und 2n+1 eine ungerade Zahl. Man ſetze nun die Wurzel $= \sqrt{a}$, ſo iſt ihr Quadrat $= a$, eine rationale ganze Zahl, wie im Lehrſatz angenommen wurde. Es iſt dahero der Beweis für beyde Fälle folgender:

I. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{(a)^{2n}} = a^{\frac{1}{2}\cdot 2n}$$

$$a^{\frac{1}{2}\cdot 2n} = a^n$$

$$\sqrt{(a)^{2n}} = a^n \text{ Rational.}$$

II. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{a^{(2n+1)}} = a^{\frac{1}{2}(2n+1)}$$

$$a^{\frac{1}{2}(2n+1)} = a^{n+\frac{1}{2}}$$

$$a^{n+\frac{1}{2}} = a^n . \sqrt{a^n}\sqrt{a} = a^n\sqrt{a}$$

$$\sqrt{(a)^{(2n+1)}} = a^n\sqrt{a} \text{ Irrational.}$$

§. 208. **Erklär.** Eingebildete Wurzeln (Radices imaginariæ) ſind alle Wurzeln von negativen Größen, die gerade Exponenten haben. Z. E. $\sqrt{-4}$ oder $-4^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{-8}$ oder $-8^{\frac{1}{4}}$.

§. 209. **Zuſatz.** Weil gleiche Faktoren, die in gerader Anzahl ſtehen, nämlich je zween und zween, vier und vier, ſechs und ſechs u. ſ. w. jedesmal ein poſitives Produkt geben, die Faktoren mögen poſitiv oder negativ ſeyn; (denn $-x . -x = +x^2$, wie $+x . +x = +x^2$) ſo iſt die Wurzel eines geraden Exponenten aus einer negativen Gröſſe etwas un-

unmögliches; man kann alſo die eingebildete Wurzeln füglich **unmögliche** Wurzeln heiſſen.

§. 210. **Anmerk.** Z. E. $\sqrt{-9}$ iſt eine unmögliche Wurzel; denn entweder iſt ſie $+3$ oder -3; iſt ſie $+3$, ſo iſt ihr Produkt oder Quadrat $= +9$; iſt ſie -3, ſo iſt abermal ihr Produkt oder Quadrat $-3 \cdot -3 = +9$. Zwiſchen $+3$ und -3 giebt es aber kein drittes; das iſt der Grund, warum man ſolche Wurzeln auch unmögliche Wurzeln nennet.

§. 211. **Zuſatz.** Die Wurzel eines ungeraden Exponenten aus einer negativen Gröſſe iſt alſo nicht unmöglich. Z. E. $\sqrt[3]{-8} = -2$, weil $-2 \cdot -2 = +4$ und $+4 \cdot -2 = -8$. folglich $\sqrt[3]{-8} = -2$, eine mögliche Gröſſe.

§. 212. **Lehrſatz.** Man kann alle eingebildete oder unmögliche Wurzeln als Quadratwurzeln anſehen, die entweder aus möglichen negativen Größen oder aus unmöglichen gezogen werden. Denn der allgemeinſte Ausdruck für alle eingebildete oder unmögliche Wurzeln iſt, (wenn n, wie oben §. 207. eine ganze poſitive Zahl bedeutet), $\sqrt[2n]{-x}$. Da nun

$$\sqrt[2n]{-x} = -x^{\frac{1}{2n}}$$

$$-x^{\frac{1}{2n}} = -x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}$$

$$-x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}} = \sqrt{(-x)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\sqrt{(-x)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{(\sqrt[n]{-x})}$$

ſo iſt $\sqrt[2n]{-x} = \sqrt{(\sqrt[n]{-x})}$ die Quadratwurzel aus einer möglichen negativen oder unmöglichen Gröſſe.

§. 213. **Anmerk.** Wir werden im folgenden weiter unten zeigen, daß eine gerade poſitive Potenz allemal zwo entgegengeſetzte gleiche mögliche Wurzeln habe; wie z. E. $\sqrt{16} = -4$ und $= +4$; weil $-4 \cdot -4 = 16$, und $+4 \cdot +4 = 16$;

ferner, daß eine jede Potenz von einem ungeraden Exponenten nur eine mögliche Wurzel habe; und weiter, daß eine Potenz, ihr Exponent mag gerade oder ungerade ſeyn, ſo viel theils mögliche theils unmögliche Wurzeln habe, als der Exponent Einheiten hat; z. E. x^3 hat drey Wurzeln, eine mögliche und zwo unmögliche; x^{12} hat zwölf Wurzeln, zwo mögliche und zehen unmögliche; endlich daß die unmöglichen Wurzeln allemal paarweis vorhanden, das iſt, wo eine, auch die zweyte, wo drey, auch die vierte, wo fünf, auch die ſechſte u. ſ. w. ſeyn müſſe; oder daß die unmöglichen Wurzeln niemals in ungerader Anzahl vorhanden ſeyn können. Oder allgemein, weil 2n der gerade Exponent, und 2n + 1 der ungerade Exponent iſt, ſo hat man im erſten Falle 2n — 2, in dieſem 2n unmögliche Wurzeln. Die ganze Lehre kömmt unter dem Titel von Gleichungen vor.

Der binomiſche Lehrſatz.

§. 214. **Erklär.** Weil eine jede Gröſſe aus zween Theilen beſteht, und alſo eine jede Potenz, wenn der Exponent m heißt, durch $(a + b)^m$ ausgedrückt werden kann, ſo verſteht man unter dem binomiſchen Lehrſatz nichts anders, als die Art und Weiſe, wie man für jede Potenz die Koeffizienten auch auſſer der Ordnung finden und angeben könne, und in ſoferne gehört er unter die Erfindungen der Neuern.

§. 215. **Anmerk.** Der Urſprung des Namens iſt, wie wir ſchon gemeldet haben, die zweytheilige Wurzel, welche halb griechiſch und halb lateiniſch binomium heißt; daher der Lehrſatz ſelbſt Theorema binomiale genannt wird; dem Newton zu Ehren, den man insgemein für den Erfinder davon hält, wird es auch Theorema Newtonianum genannt; andere wollen den Paſcal zum erſten Erfinder davon angeben, beſonders Joh. Bernoulli, der dieſes bekräftiget; Opp. T. IV. p. 173. Es iſt nämlich die Rede von den Beſtimmungen, die wir oben vorgetragen haben. Denn ſonſt hat man ſchon in ältern Zeiten was davon gewußt, daß nämlich die Koeffizienten durch Addition der figurirten Zahlen entſtehen, wie zu dem Ende die Tabula mirifica bekannt iſt, auch Clavius ſchon vor bald 200 Jahren in Geom. pract. L. VI. Prop. 9. davon geſchrieben, und ich in meinen erſten Gründen aller mathematiſchen Wiſſenſch. §. 115. dieſe Art, wie die Alten ſich aus-

drück-

drückten, angeführt habe. Die allgemeinen Formeln und Ausdrücke waren den Alten nicht bekannt. Auch Paſcal ſelbſt, wenn er ſie erfunden, oder nach ihm Newton, haben bey den Formeln keinen allgemeinen Beweis gegeben, ſondern den Satz durch eine Induktion vorgetragen. Er läßt ſich aber aus der Differentialrechnung unumſtößlich beweiſen, wie ſolches zuerſt der Herr Prof. **Euler** bewieſen, Inſt. Calc. Diff. P. II. §. 72. Nachgehends habe ich, da ich zu Berlin bloß um dieſes berühmten Gelehrten willen, deſſen Unterricht ich nutzen wollte, mich aufhielte, aus meinen zu Berlin geſammelten und zuſammengeſchriebenen Anmerkungen den Beweis in einem franzöſiſchen Brief an ihn 1753. Lettre ſur quelques paradoxes du Calcul, gerade ſo vorgetragen, wie ihn Herr Hofrath **Käſtner** 1758. in Theorem. binom. univerſaliter demonſtrato, und in den Anfangsgründen der Analyſis des Unendlichen, welche der IV. Th. ſ. Mathematik ſind, §. 46. ausgeführet hat. Da Herr Hofrath **Käſtner** die Gründe der Differentialrechnung überzeugender als andere vorgetragen, ſo iſt ſein Beweis dadurch noch vollſtändiger geworden; die Urſache, warum man zum richtigen Beweis die Differentialrechnung nöthig hat, iſt dieſe, weil die Exponenten auch negativ ſeyn können; denn wenn ſie poſitiv ſind, ſo kann man den Beweis ohne die Beyhilfe dieſer Rechnung geben, wie Herr Hofrath **Käſtner** 1745. ſchon in demonſtr. Theor. binom. gezeigt hat; die Bedenklichkeiten aber, wenn negative Exponenten vorhanden ſind, ſtehen in ſ. Mathem. T. III. § 752. womit man auch Herren Clairaut Algebra IV. T. Art. 54. und Herrn von Segner Analyſ. finitorum §. 264. vergleichen kann.

§. 216. **Lehrſatz.** Wenn man den Kubus einer zweytheiligen Wurzel mit der Wurzel multiplizirt, ſo bekömmt man die vierte Potenz, und wenn man dieſe wieder mit der Wurzel multiplizirt, die fünfte u. ſ. w. da dann die Potenzen vom erſten Theil der Wurzel oder von a immer in natürlicher Ordnung der Zahlzeichen ab, die von b aber in eben ſolcher Ordnung zunehmen, und die Koeffizienten oder Unzen, wie man ſie ſonſt heißt, das iſt, die Zahlen, in welche das Produkt aus den Theilen der Wurzeln jedesmal multiplizirt iſt, die Quotienten ſind aus den Produkten der vorhergehenden Exponenten von dem erſten Theil der Wurzel oder a, dividirt durch die Produkte der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen 1.2.3. u. ſ. w. nach der An-

zahl der Glieder, wie ſolches der Augenſchein durch eine Induktion in folgender Tabelle erweiſt, in welcher die Glieder bis auf die ſiebente Potenz ſteigen.

$1a$	$1b$						
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$					
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$				
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$			
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$		
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$	
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$

§. 217. **Zuſatz.** Wenn man alſo zwo Reihen Glieder untereinander ſchreibt, daß die Exponenten der einen eben ſo abnehmen, wie die Exponenten der andern zunehmen, ſo werden die Produkte der Potenzen ſelbſt die Glieder der Potenz des Binomii, ohne die Koeffizienten, geben;

a^5	a^4	a^3	a^2	a	1
1	b	b^2	b^3	b^4	b^5
a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5

§. 218. **Zuſatz.** Wenn man für den Exponenten von a ſetzet m, ſo hat man a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$ u. ſ. w.

§. 219. **Zuſatz.** Die Koeffizienten findet man, wenn man die Produkte von den vorhergehenden Exponenten durch die Produkte der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen dividirt; denn die Koeffizienten ſind 5, 10, 10, 5, ſie kommen aber heraus durch die ſchon gemeldte Diviſion der Produkten, denn

$$\frac{5}{1} = 5$$
$$\frac{5}{1} : \frac{4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$
$$\frac{5}{1} : \frac{4}{2} : \frac{3}{3} = \frac{60}{6} = 10$$
$$\frac{5}{1} : \frac{4}{2} : \frac{3}{3} : \frac{2}{4} = \frac{120}{24} = 5$$

Oder allgemeiner, wenn $5 = m$, ſo ſind die Koeffizienten $\frac{m}{1}$, $\frac{m . m - 1}{1 . 2}$, $\frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3}$, $\frac{m . m - 1 . m - 2 . m - 3}{1 . 2 . 3 . 4}$ u. ſ. w.

§. 220. Zuſatz. Der allgemeine Ausdruck für eine Potenz iſt alſo $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m . m - 1}{1 . 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3} a^{m-3}b^3 + \frac{m . m - 1 . m - 2 . m - 3}{1 . 2 . 3 . 4} a^{m-4}b^4$ u. ſ. w.

§. 221. Zuſatz. Weil $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, nach §. 183: ſo kann die Reihe, wenn man Gleiches für Gleiches ſetzt, auch folgendermaſſen ausgedrückt werden: $a^m + \frac{ma^m b}{1a} + \frac{m . m - 1 a^m b^2}{1 . 2 \quad a^2} + \frac{m . m - 1 . m - 2 a^m b^3}{1 . 2 . 3 \quad a^3}$ u. ſ. w.

§. 222. Zuſatz. Wenn man den Ausdruck $\frac{b}{a}$, der in allen Gliedern, auſſer dem erſten, vorkömmt, ſetzet $= Q$, und das erſte Glied $a = P$, ſo heißt die Reihe:

$$P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m . m - 1}{1 . 2} P^m Q^2 + \frac{m . m - 1 . m - 2.}{1 . 2 . 3} P^m Q^3 \text{ u. ſ. w.}$$

§. 223. Zuſatz. Weil das erſte Glied im zweyten, das zweyte im dritten, das dritte im vierten u. ſ. w. enthalten iſt, ſo nenne man, um das viele Schreiben zu vermeiden, das erſte

erſte Glied, wenn es im zweyten wieder vorkömmt, A, das zweyte im dritten B, das dritte C, das vierte D u. ſ. w. die Reihe heißt alsdann, wenn man den übrigen Faktor dem vorhergehenden Gliede jedesmal beyſeßt, $P^m + mAQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ$ u. ſ. w. Denn nach §. 222. iſt $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} Q \,.\, P^m$, da nun P^m das unmittelbar vorhergehende Glied iſt, und gleich A geſeßt wurde, ſo iſt $\frac{m}{1} Q . P^m = \frac{m}{1} Q . A = \frac{m}{1} AQ$; und weil $m.m-1.P^m Q^2 = \frac{m}{1} P^m Q . \frac{m-1}{2} Q$; $\frac{m}{1} P^m Q$ aber das unmittelbar vorhergehende Glied war, das man B nennet, ſo iſt $\frac{m.m-1}{1\,.\,2} . P^m Q^2 = B . \frac{m-1}{2} Q = \frac{m-1}{2} BQ$ u. ſ. w.

§. 224. **Zuſaß.** Nach dieſer leßten, oder auch nach der erſten Formel kann man daher leicht alle Potenzen finden, und alle Wurzeln ausziehen, wenn man nur bemerkt, daß im leßtern Fall m ein Bruch ſey, z. E. $\sqrt[4]{x^{10}} = x^{\frac{10}{4}}$, da dann $m = \frac{10}{4}$ iſt (*).

(*) Zum Gebrauch bey Ausziehung der Wurzeln bedient man ſich mit größerem Vortheile folgender Formel:

$$P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ \text{ u. ſ. w.}$$

Man kömmt zu dieſer Formel, (die mit der von §. 223. vollkommen übereinſtimmt, nur in der äuſſerlichen Geſtalt unterſchieden iſt) auf eben die Art wie man zur vorigen gelangte. Wenn man in dem Ausdruck §. 220.

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} a^{m-2} b^2 \text{ u. ſ. w.}$$

ſtatt m den gebrochenen Exponenten $\frac{m}{n}$ ſetzet, ſo wird $a^{\frac{m}{n}} +$
$\frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b + \frac{m}{n} \,.\, \frac{\frac{m}{n}-1}{2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2$ u. ſ. w.

oder §. 63.

$$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-\frac{n}{n}} b + \frac{m}{n} \cdot \frac{\frac{m}{n}-\frac{n}{n}}{2} a^{\frac{m}{n}-\frac{2n}{n}} b^2 \text{ u. ſ. w.}$$

oder

$$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m-n}{n}} b + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} a^{\frac{m-2n}{n}} b^2 +$$
$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} a^{\frac{m-3n}{n}} b^3$$

ꝛc.

Weil nun im vorigen $a^{\frac{m-n}{n}} = a^{\frac{m}{n}-1}$; und dieſes $= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a}$;

und $a^{\frac{m-2n}{n}} = a^{\frac{m}{n}-2}$; und dieſes $= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^2}$;

ſo iſt die obige Reihe gleich

$$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \frac{a^{\frac{m}{n}} b}{a} + \frac{m+m-n}{n \,.\, 2n} \frac{a^{\frac{m}{n}} b^2}{a^2} + \frac{m \,.\, m-n \,.\, m-2n}{n \,.\, 2n \,.\, 3n} \frac{a^{\frac{m}{n}} b^3}{a^3}$$

oder

$$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}} \,.\, \frac{b}{a} + \frac{m-m-n}{n \,.\, 2n} a^{\frac{m}{n}} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m.m-n.m-2n}{n \,.\, 2n \,.\, 3n} a^{\frac{m}{n}} \frac{b^3}{a^3} \text{ ꝛc.}$$

Setzt man nun $a = P$ und $\frac{b}{a} = Q$; ſo wird man die obige Formel nach den Vorſchriften des §. 223. leicht erhalten.

§. 225. **Zuſatz.** Wenn man in der Reihe §. 220. $a = 1$ ſetzt, ſo hat man $(1+b)^m = 1 + mb + \frac{m.\overline{m-1}.b^2}{1\,.\,2} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.b^3}{1\,.\,2\,.\,3}$ — — —

und wenn $b = e$, $(1+e)^m = 1 + me + \frac{m.\overline{m-1}}{1\,.\,2}e^2$ — — —

§. 226. **Zuſatz.** Man dividire $(a+b)^m$, durch a, ſo hat man $\left(\frac{a+b}{a}\right)^m = \left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, dieſen Ausdruck multiplizire man wieder mit a, ſo hat man $a\,.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$ $= a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$ nach §. 186. dahero wird die Reihe $1+me+\frac{m.\overline{m-1}}{1\,.\,2}e^2$ — — — die erſte wieder geben, wenn man $e = \frac{b}{a}$ ſetzt, und jedes Glied der Reihe mit a^m multiplizirt; da dann $(a+b)^m$ wieder herauskömmt, und durch dieſe Subſtitution eine Reihe in die andere kann verwandelt werden.

§. 227. **Zuſatz.** Wenn der Exponent um eines vermehrt oder $m = m + 1$ geſetzt wird, ſo ſind die Koeffizienten $\frac{m+1}{1}$, $\frac{m+1\,.\,m}{1\,.\,2}$, $\frac{(m+1)\,.\,m\,.\,\overline{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3}$ u. ſ. w. und die Reihe iſt $a^{m+1} + \frac{m+1}{1}a^m b + \frac{\overline{m+1}.m}{1\,.\,2}a^{m-1}b^2 + \frac{\overline{m+1}\,.\,m\,.\,\overline{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-2}b^3$.

§. 228. Anmerk. Den Beweis für den binomiſchen Lehrſatz, wie man ihn nach aller Schärfe verlangen kann, habe ich in meinen erſten Gründen aller mathematiſchen Wiſſenſchaften, die 1759. herauskamen, aus der Lehre der Differentialrechnung vorge-

tragen

tragen und erläutert, P. I. Cap. V. §. 110. und im folgenden ſoll noch was davon vorkommen.

Die höchſten Unterſchiede oder Differenzen der Potenzen und die Natur der geraden und ungeraden Zahlen.

§. 229. **Lehrſatz.** Alle geraden Zahlen laſſen ſich durch 2n, die ungeraden aber durch $2n + 1$, oder $2n - 1$ ausdrücken; denn weil eine gerade Zahl ſich durch Zwey muß ganz dividiren laſſen, ſo iſt 2n der allgemeine Ausdruck für ſie; und weil 1 durch 2 dividirt, allemal einen Bruch $= \frac{1}{2}$ giebt, ſo iſt $2n - 1$ oder $2n + 1$ der ſchicklichſte Ausdruck für alle ungerade Zahlen.

§. 230. **Zuſatz.** Die Summe zwoer geraden Zahlen iſt gerade; denn $2n + 2n = 4n = 2 . 2n$; auch iſt die Summe zwoer ungeraden Zahlen gerade; denn $2n + 1, + 2m + 1 = 2n + 2m + 2$, oder $2n - 1, + 2m + 1 = 2n + 2m$ gerade.

§. 231. **Zuſatz.** Die Summe einer geraden und ungeraden Zahl iſt ungerad; denn $2n + 2m + 1$ oder auch $2n + 2m - 1$ iſt ungerad.

§. 232. **Zuſatz.** Das Produkt zwoer geraden und auch einer ungeraden in eine gerade iſt gerad; denn $(2n - 1).2n = 4n^2 - 2n$; aber das Produkt zweyer ungeraden Zahlen iſt ungerad, denn $(2n - 1).(2n + 1) = 4n^2 - 1$, ſo auch $(2n + 1).(2m + 1) = 4nm + 2m + 2n + 1$.

§. 233. **Zuſatz.** Wenn $n = 0$, ſo iſt die erſte ungerade Zahl $= 1$, denn $2 . 0 + 1 = 1$, wenn $n = 1$, ſo iſt die andere ungerade Zahl $= 3$. Denn $2n + 1 = 2 . 1 + 1 = 3$; wenn $n = 2$, ſo iſt die dritte ungerade Zahl 5; denn $2 . 2 + 1 = 5$ u. ſ. w.

§. 234.

§. 234. **Zuſatz.** Wenn man alle ungerade Zahlen nach den natürlichen Reihen addirt, ſo findet man alle mögliche Quadrate; denn

1	$= 1 =$	1^2
$1+3$	4	2^2
$1+3+5$	9	3^2
$1+3+5+7$	16	4^2
$1+3+5+7+9$	25	5^2 u. ſ. w.

§. 235. **Lehrſatz.** Wenn zwo Wurzeln um eins unterſchieden ſind, wie n und $n+1$, ſo ſind ihre Quadrate n^2 und n^2+2n+1, und der Unterſchied ihrer Quadrate iſt $2n+1$, (weil $n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$). Wenn man nun in dieſem Unterſchiede wieder ſetzt $n = n+1$, ſo hat man $2(n+1)+1$, oder $2n+2+1$. Der obige erſte Unterſchied von dieſem zweyten abgezogen, läßt $2n+2+1-(2n+1) = 2$, der letzte Unterſchied, der unverändert bleibt. Und wenn man die Kubikzahlen eben ſo behandelt, daß m und $m+1$ zwo Wurzeln ſind, ſo ſind die Kubi m^3 und m^3+3m^2+3m+1; ihr Unterſchied oder Differenz $= 3m^2+3m+1$; nun werde aus m wieder $m+1$, deſſen Werth in der Differenz ſubſtituirt giebt $3(m+1)^2 + 3(m+1)+1 = 3m^2+9m+7$, die obige erſte Differenz davon abgezogen, läßt $6m+6$, die zweyte Differenz; nun werde aus m zum drittenmal $m+1$, ſo wird, wenn man im zweyten Unterſchiede ſubſtituirt, aus $6m+6$ werden $6(m+1)+6 = 6m+6+6 = 6m+12$; von dieſem den zweyten Unterſcheid $6m+6$ ſubtrahirt, läßt den dritten und letzten Unterſchied 6, der abermal beſtändig iſt. Oder allgemein, wenn x^m geſetzt wird, und aus x wird $x+e$, ſo hat man $(x+e)^m - x^m$; oder nach §. 216. wirklich erhoben, $x^m + mex^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}e^2x^{m-2} \ldots - x^m$ $= mex^{m-1}$ ———, der erſte Unterſchied, deſſen höch-

ſtes

ſtes Glied $= mex^{m-1}$. Nun werde aus x abermal $x+e$, ſo bekömmt man den zweyten Unterſchied deſſen höchſtes Glied $(m.m-1)e^2x^{m-2}$ u. ſ. w., bis man endlich auf den mten Unterſchied kömmt, der beſtändig und der kleinſte iſt.

§. 236. Zuſatz. In den Quadraten ſind die zweyten Unterſchiede beſtändig, in den Kubis die dritten, in den Biquadraten die vierten u. ſ. w.

§. 237. Anmerk. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern; man ſetze folgende Zahlen:

Die Quadr. Wurzel.				Die Kubikwurzel.				
II. Diff.	I. Diff.			III. Diff.	II. Diff.	I. Diff.	Kubi.	
		1	1				1	1
	3	4	2			7	8	2
2	5	9	3		12	19	27	8
2	7	16	4	6	18	37	64	4
2	9	25	5	6	24	61	125	5
2	11	36	6	6	30	91	216	6
2	13	49	7	6	36	127	343	7
				6	42	169	512	8

§. 238. Anmerk. Dieſe Lehre hat viele Vortheile in Erfindung verſchiedener Aufgaben; Herr Prof. Ries hat in einer gelehrten akademiſchen Diſſertation, unter dem Titel: Dilucidationes analyſeos Finitorum Kæſtnerianae 1762. die Probe davon gegeben, und überhaupt das, was ſchwer ſcheint, darinn erläutert. Hier aber würde es zu weitläuftig ſeyn, eine weitere Anwendung zu machen; es iſt genug, wenn man den Satz verſtehet; die Uebung wird hernach manchen Anleitung geben, aus den dritten, vierten, fünften Unterſchieden u. ſ. w. die Zahlen zu finden, wenn er im Rechnen ſelbſt ſich umgeſehen hat.

Die Kombinationen.

§. 239. Lehrſatz. Eine gegebene Anzahl von Dingen, z. E. Buchſtaben, Wörtern, Perſonen, läßt ſich ſo oft verſetzen, als das aus allen in natürlicher Ordnung bis auf die gegebene Zahl fortgehenden Zahlzeichen entſtehende Produkt

Ein-

Einheiten hat; wenn z. E. die Zahl 6 gegeben iſt, ſo laſſen ſich ſechs Buchſtaben 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 verſetzen, oder wenn die Anzahl = n, ſo giebt es n . n — 1 . n — 2 . n — 3 . n — 4 . n — 5 u. ſ. w. Verſetzungen. Denn wenn man zuerſt zween Buchſtaben nimmt, a und b, ſo giebt es nur zwo Verſetzungen ab, und ba, das iſt 1 . 2 Kombinationen. Nimmt man den dritten Buchſtaben c dazu, ſo kann er dreymal mit ab nämlich vornen, mitten und hinten verbunden werden, und eben ſo vielmal mit ba, folglich giebt es ſechs, oder 3 . 2 . 1 Verſetzungen.

I. cab	I. cba
acb	bca
abc	bac.

Der vierte Buchſtab d ſolle dazu kommen; dieſer läßt ſich viermal mit einem der hingeſetzten Sechſe verbinden, nämlich vornen, in der zweyten und in der dritten Stelle und hinten.

I. dcab	II. dacb	III. dabc	IV. dcba	V. dbca	VI. dbac
cdab	adcb	adbc	cdba	bdca	bdac
cadb	acdb	abdc	cbda	bcda	badc
cabd	acbd	abcd	cbad	bcad	bacd

Folglich ſind die Verbindungen 4 . 6 oder 24, das iſt 4 . 3 . 2 . 1; auf eine ähnliche Weiſe erhellet, daß fünf Buchſtaben ſich 5 . 4 . 3 . 2 . 1, und alſo allgemein, n Buchſtaben, wenn keiner doppelt geſetzt wird, n . n — 1 . n — 2 . n — 3 . n — 4 u. ſ. w. kombiniren laſſen.

§. 240. **Zuſatz.** Wenn man bey einer gewiſſen Zahl aufhöret, und fragt, wie vielmal n Zahlen nach der Zahl m, ſo daß allemal, ohne auf die Ordnung zu ſehen, m Einheiten davon zuſammen kommen, verbinden laſſen, ſo muß man mit dem Produkt der natürlichen Zahlzeichen bis auf m die obere Zahl dividiren, das iſt, die Kombination wird

=

$= \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4- - -}{1.2.3.4.5.- - - m}$. Denn a, b, c, d ſollen ſo kombinirt werden, daß allemal 3 zuſammen kommen, ſo giebt es nur vier Verbindungen; abc, abd, acd, bcd, wenn man, wie vorausgeſetzt wird, auf die Ordnung der Buchſtaben nicht ſieht; das iſt $\frac{4.2.3.1}{3.2.1} = 4$.

§. 241. **Zuſatz.** Wenn ein Buchſtabe doppelt geſetzt wird, oder zweymal vorkömmt, ſo muß man das obige Produkt mit 2.1 dividiren, kömmt er dreymal in einerley Kombination vor, ſo dividirt man mit 3.2.1, und mit 4.3.2.1 wenn er viermal vorkömmt, u. ſ. w. Denn wenn a allein gegeben iſt, ſo giebt es den einigen Ausdruck aa, kömmt b dazu, ſo giebt es drey baa, aba, aab; kömmt c dazu, ſo wird es mit einem jeden der drey nach §. 239. viermal verbunden; alſo in allem kommen heraus 12 Verſetzungen $= \frac{4.3.2.1}{2.1} = \frac{24}{2} = 12$.

§. 242. **Zuſatz.** Kommen von zween oder auch von drey Buchſtaben u. ſ. w. je zween und zween zuſammen, ſo gehen die Kombinationen nach den Quadraten dieſer gegebenen Anzahl; z. E. a und b geben aa bb / ab ba vier Verſetzungen; a,b,c, geben neun,

aa, bb, cc
ab ba ca.
ac bc cb

Vier geben auf eine ähnliche Weiſe 16, u. ſ. w. Folglich laſſen ſich die neun arabiſche Zahlzeichen 9^2mal, das iſt, 81mal kombiniren.

§. 243. **Zuſatz.** Sind es ihrer drey, davon eine jede dreymal vorkömmt, ſo gehts nach Kubikzahlen, und giebt 27 Verſetzungen; ſind es vier, und kömmt jede dreymal vor, ſo giebt es $4^3 = 64$ Verſetzungen; und ſo oft laſſen ſich die Zeichen der Modorum in den Syllogiſmis A, E, I, O verſetzen.

§. 244.

§. 244. Anmerk. Man kann aus dieſen Regeln verſchiedene Aufgaben auflöſen; z. E. wie oft kann man mit 12 Perſonen an einer Taf:l abwechſeln? Die Antwort iſt nach §. 239. $12 . 11 . 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1$. Alſo viel Millionen mal; wenn man ſie auch alle Tag zweymal zu Gaſte ladet, ſo wird keiner die Veränderungen auswarten, bis er wieder in ſeinen alten Platz kömmt, ſollte er auch noch ſo alt werden. Eben ſo nach dem folgenden Zuſatz §. 240. kann man beſtimmen, wie oft man 24 Buchſtaben ſo kombiniren könne, daß z. E. jedesmal 6 zuſammen kommen; nämlich $\frac{24 . 23 . 22 . 21 . 20 . 19}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}$

$$= \frac{23 . 22 . 21 . 4 . 19}{2 . 3} = \frac{23 . 22 . 21 . 2 . 19}{3} = 23 . 22 . 7 . 2 . 19$$

oder $23 . 22 . 19 . 14$, wenn man nämlich oben und unten aufhebt, was ſich aufheben läßt. Ferner wie oft man aus v:erzig Blättern neun nehmen könne, ſo daß man nie einerley bekomme; $\frac{40 . 39 . 38 . 37 . 36 . 35 . 34 . 33 . 32}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}$ $= 37 . 32 . 19 . 17 . 13 . 11 . 5 = 273438880$; oder wie oft man aus 38 könne 7 nehmen, nämlich $\frac{38.37.36.35.34.33.32}{1.2.3.4.5.6.7}$ $= 38 . 37 . 34 . 33 . 8 = 13148076$; welches bey Glücksſpielen, wo man die Fälle vergleicht, wenn man in gegenwärtiger Rechnung nur die Millionen nimmt, eine Verhältniß wie 13:273, oder ungefähr wie 1 : 21 giebt; da dann unter 21 Fällen nur einer iſt, wo man eine Hoffnung hat, was zu gewinnen, geſetzt, daß von 40 nur 2 recht gute ſind. Herr Hofrath **Käſtner** hat es auf die Spiele, auf die Modos der Syllogi morum u. ſ. w. angewendet. Man kann es aber auch auf unſere arabiſche Zahlzeichen nach der doppelten Verbindung §. 242. anwenden, da ſich leicht ergiebt, daß neun Zeichen, davon jedes zweymal vorkömmt, in de: combinatione binaria nur 9 . 9 oder 81mal können verbunden werden.

§. 245. Anmerk. Man kann hieher noch die figurirte Zahlen rechnen, welche man am beſten aus folgender Tabelle verſteht.

Δ

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Wenn man die ſchiefe Parallelreihen zählt, ſo enthält die erſte lauter Einheiten, die zwente die Summe dieſer Einheiten, alſo die in natürlicher Ordnung fortgehende Zahlzeichen, die dritte die Summe der erſten Glieder der vorigen Reihe, oder natürlichen Zahlen; denn $3 = 2 + 1$, $6 = 3 + 2 + 1$, $10 = 4 + 3 + 2 + 1$ u. ſ. w. und dieſe Reihe Zahlen 1, 3, 6, 10 heißt man Triangularzahlen; die vierte enthält die Summe der Glieder der Triangularzahlen, denn $4 = 3 + 1$, $10 = 6 + 3 + 1$ u. ſ. w. Dieſe heißt man Quadrangularzahlen; u. ſ. w. Lieſt man aber die Horizontalreihen der vorgeſetzten Zahlen, ſo hat man die Koeffizienten der Potenzen einer zwentheiligen Wurzel. Z. E. 1, 2, 1, von $(a + b)^2$; 1, 4, 6, 4, 1 die Koeffizienten von $(a+b)^4$; 1, 5, 10, 10, 5, 1 die Koeffizienten von $(a + b)^5$ u. ſ. w. Das haben die Alten gewußt, welche dieſe Tabelle eine Tabulam mirificam genannt; wie dann auch daraus erhellt, warum dieſe Zahlen figurirte Zahlen heiſſen.

§. 246. **Anmerk.** Die Alten haben noch allerhand Eigenſchaften der Zahlen gefunden: z. E. die Primzahlen, (numeri primi), die keine Faktoren haben, auſſer die Einheit und die gegebene Zahl ſelbſt, wenn man ſie anders Diviſoren heiſſen will; ſolche Primzahlen ſind 2, 3, 5, 7, 11 u. ſ. w. Ferner iſt die Rede von vollkommenen Zahlen, deren ſchon Euclides gedenkt, (numeri perfecti); ſolche Zahlen werden durch die Summe und das Produkt ihrer Faktoren gemeſſen; die erſte vollkommene Zahl iſt 6, weil $1 . 2 . 3 = 6$, und $1 + 2 + 3 = 6$. die nächſte iſt 28, weil $1, 2, 4 = 7$ und $4 . 7 = 28$: dieſe Zahlen aber ſind die Diviſoren von 28; die dritte iſt 496, denn $1, 2, 4, 8, 16 = 31$, und $31 . 16 = 496$ u. ſ. f. Man hat bis auf die Trillionen nicht mehr als 8 vollkommene Zahlen heraus gebracht. Was die Pronikzahlen betrift, ſo ſind ſie die Summe der Quadrate und Wurzeln; das iſt, wenn man zu einem Quadrat ſeine

Wurzel addirt, ſo hat man die Pronikzahl. $4 + 2 = 6$ iſt eine Pronikzahl, $9 + 3 = 12$ eine Pronikzahl; oder allgemein $n^2 + n$ eine Pronikzahl; weil nun $n^2 + n = (n + 1)n$, ſo wird das Produkt zweyer unmittelbar auf einander folgenden Zahlen allemal eine Pronikzahl ſeyn; z. E. $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 7$, $7 \cdot 8$ u. ſ. w. ſind Pronikzahlen. Da ich bisher von den Zahlen und ihren Kombinationen geredet habe, ſo will ich doch noch was von dem Mairanianiſchen Problem ſagen. Die Aufgabe ſteht in den Memoires de l'Acad. de Paris 1709. und es iſt, ſo viel mir bekannt, noch keine allgemeine Aufloͤſung gegeben worden. Woher koͤmmt es, daß die Differenz zwoer Zahlen, davon die eine nur die andere verkehrt iſt, z. E. $(31 - 13 = 18)$ immer ein Neuner oder das vielfache eines Neuners iſt; und daß dieſe Regel auch bey den Quadraten, Kubis, und hoͤhern Potenzen dieſer Zahlen ſtatt hat. Man ſetze a, b, c, dergeſtalten, daß b das zweyfache, c das dreyfache von a ſey, den Lokalwerth druͤcke man durch m aus; ſo wird die letzte einfache Note in jeder Progreſſion $m - 1$ ſeyn; man betrachte nun zwo Zahlen ab und ba, deren eine die andere umgekehrt iſt; nach obiger Beſtimmung des Lokalwerths und Bedeutung der Buchſtaben iſt $ab = ma + 2a$ und $ba = 2ma + a$; nun ſubtrahire man, ſo iſt $ba - ab = 2ma + a - ma - 2a = ma - a = (m - 1)a$. Wenn alſo $a = 1$, ſo iſt die Differenz $m - 1$, das letzte einfache Zahlzeichen, folglich in der dekadiſchen Progreßion 9. Setzt man die Zahlen $ca - ac$, das iſt $3ma + a - ma - 3a = 2ma - 2a = (2m - 2)a$, ſo hat man, wenn $a = 1$, die Differenz $(m - 1)2$, folglich in der dekadiſchen Progreßion das Multiplum von neune; ſetzt man endlich $cba - abc$, das iſt $3m^2a + 2ma + a - m^2a - 2ma - 3a = (2m^2 - 2)a$, das iſt, wenn $a = 1$ die Differenz $(m^2 - 1)2 = (m - 1) \cdot (m + 1)2$; oder uͤberhaupt, weil $m^n - 1 = m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + m^{n-4} \ldots\ldots + 1)$ $(m - 1)$ das Multiplum von der letzten einfachen Note, folglich in der dekadiſchen Progreßion das vielfache von 9. Dieß iſt allgemein; wenn nur die Wurzelzahlen allemal verkehrt ſind, ihre Quadrate und Kubi darfen es deßwegen nicht auch ſeyn. Z. E. $21^3 = 9261$ und $12^3 = 1728$, dieſe zween Kubi ſind nicht einerley verkehrte Zahlen, und doch iſt ihre Differenz 7533 ein vielfaches von neun; hier meynt Herr von Mairan eine groſſe Schwierigkeit gefunden zu haben; allein die Generalregel wird alles klar mchen; $21^3 = (2ma + a)^3 = (2m + 1)^3 = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1$; eben ſo iſt $12^3 = (ma + 2a)^3 = (m + 2)^3 = m^3 + 6m^2 + 12m + 8$ und ihre Differenz $21^3 -$

12^3

$12^3 = 7m^3 + 6m^2 - 6m - 7. = (m^3 - 1)\,7 + (m - 1)6m. = (m^2 + m + 1).(m - 1)7 + (m - 1)6m.$ welches das vielfache der letzten einfachen Note, oder in der dekadiſchen Progreßion das vielfache von Neun iſt. Ich habe hievon, und auch von der Beobachtung, daß alle Multipla von 9 durch die Addition wieder Neune werden, z. E. 18 = 8 + 1 = 9, 27 giebt 2 + 7 = 9. u. ſ. w. ausführlich in meinen Opuſculis varii Argumenti 1767: Tractatu III. gehandelt.

Von den Proportionen.

§. 247. **Erklär.** Die Vergleichung zwoer Zahlen entweder durch die Subtraktion, oder durch die Diviſion heißt in jenem Falle eine **arithmetiſche**, in dieſem eine **geometriſche** Verhältniß; und die Gleichheit zwoer Verhältniſſe, heißt eine **Proportion**. Z. E. 3 — 1 = 2, und 5 — 3 = 2; das ſind zwo arithmetiſche Verhältniſſe, deren Differenz beyderſeits = 2; folglich giebt dieſe Gleichheit eine arithmetiſche Proportion 3 — 1 = 5 — 3; ferner 6 : 2 und 15 : 5 ſind zwo geometriſche Verhältniſſe, deren Quotient beyderſeits 3; dieſe Gleichheit giebt nun eine geometriſche Proportion, 6 : 2 = 15 : 5.

§. 248. **Zuſatz.** Weil das Zeichen der Diviſion :, und der Subtraktion —, und der Gleichheit =, ſo iſt die Art ſolcher Proportionen, wie ſie **Leibnitz** ſchreiben lehret, ganz natürlich 6 : 2 = 15 : 5, und 3 — 1 = 5 — 3.

§. 249. **Anmerk.** Sonſt ſchreibt man auch die geometriſche Proportionen 6 . 2 :: 15 . 5, beſonders in den Schriften der Engländer.

§. 250. **Anmerk.** Die Alten haben nur geometriſche Verhältniſſe betrachtet; dahero, wenn kein Beyname bey dem Wort **Verhältniß** und **Proportion** geſetzt iſt, ſo verſteht man allemal die geometriſchen Proportionen darunter.

§. 251. **Zuſatz.** Es iſt gleichgültig, ob das kleinere Glied vor oder nachgeſetzt wird; denn wie $6:2 = 15:5$, ſo iſt auch $2:6 = 5:15$.

§. 252. **Erklär.** Man heißt nämlich die Theile einer Proportion **Glieder**; und weil ſie eine Gleichheit zwoer Verhältniſſe iſt, ſo hat ſie vier Glieder; das erſte, das zweyte, das dritte, das vierte Glied.

§. 253. **Erklär.** Wenn das zweyte und dritte Glied einander gleich ſind, ſo heißt die Proportion **kontinuirlich, ſtätig, zuſammenhangend**, proportio continua; iſt aber das dritte vom zweyten unterſchieden, ſo heißt die Proportion **diſkret, abgeſondert**, proportio diſcreta. Z. E. $2:6 = 6:12$ iſt eine kontinuirliche geometriſche, $2-3 = 3-4$ eine kontinuirliche arithmetiſche Proportion, und $2:6 = 5:15$ eine diſkrete geometriſche, $9-7 = 8-6$ eine diſkrete arithmetiſche Proportion.

Von den arithmetiſchen Proportionen und Reihen.

§. 254. **Lehrſatz.** Weil die arithmetiſche Proportion aus zwo gleichen arithmetiſchen Verhältniſſen beſteht, die folglich einerley Differenz haben, ſo darf man nur in einer diſkreten Proportion zum erſten und zum dritten Glied die Differenz addiren, wenn man das zweyte und vierte verlangt; in einer kontinuirlichen Prop. oder auch Reihe wird die Differenz zum erſten Gliede ſo vielmal addirt, als es die Anzahl der verſchiedenen Glieder erfordert. Wenn nun das erſte Glied a, das dritte b, und die Differenz d heißt, ſo iſt $a - (a + d) = b - (b + d)$ der allgemeine Ausdruck einer diſkreten arithmetiſchen Proportion; wie es $a - a + d = a + d - a + 2d$ von einer kontinuirlichen arithmetiſchen Proportion iſt.

§. 255. **Zuſatz.** Die Summe des erſten und vierten Gliedes iſt der Summe des zweyten und dritten Gliedes in einer arithm. diſkreten Proportion gleich. Denn man addire

$$a - (a + d) = b - (b + d)$$

ſo hat man beyderſeits $b + d \quad b$

gleiche Summen $a + b + d = a + d + b.$

§. 256. **Zuſatz.** Man kann alſo das vierte Glied finden, wenn man von der Summe der beyden mittlern das erſte abzieht.

§. 257. **Zuſatz.** In einer kontinuirlichen Proporti iſt die Summe der beyden äuſſerſten Glieder dem zweyfach genommenen mittleren Gliede gleich.

$$a - a + d = a + d - a + 2d$$

$$a + 2d \qquad a + d$$

$$2a + 2d \qquad = 2a + 2d.$$

§. 258. **Zuſatz.** Man kann alſo das mittlere Glied finden, wenn man die Summe der beyden äuſſerſten halbirt, oder mit 2 dividirt.

§. 259. **Anmerk.** Man kann die Sache mit Exempeln erläutern; $2 - 5 = 4 - 7 = 2 - 2 + 3 = 4 - 4 + 3$. Hier iſt die Differenz 3; alſo $d = 3$, und das erſte Glied oder $a = 2$, das dritte oder $b = 4$. Wenn man nun das erſte und vierte addirt, ſo hat man $2 + 7 = 9$, und das zweyte und dritte, ſo hat man $5 + 4 = 9$. beyderſeits einerley Summe; geſetzt nun man wollte das vierte finden, ſo iſt, wenn man von der Summe des zweyten und dritten das erſte Glied ſubtrahirt, $(5 + 4) - 2 = 9 - 2 = 7$. Eben ſo wenn ſie kontinuirlich iſt $2 - 5 = 5 - 8$, ſo iſt die Differenz oder $d = 3$, das erſte Glied oder $a = 2$, folglich $2 - 2 + 3 = 2 + 3 - 2 + 3 + 3$

$$2 - 5 \qquad = 5 - 8$$

Man bekömmt alſo das mittlere Glied, wenn man die Summe der beyden äuſſerſten halbirt, da $\frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Der Beweis iſt aus dem obigen klar, und hat nicht die mindeſte Schwierigkeit.

§. 260. **Erklärung.** Eine Menge Zahlen, die in kontinuirlichen oder zuſammenhängenden arithmetiſchen Verhältniſſen immer fortgehen, machen eine arithmetiſche **Reihe** oder **Progreßion** aus; ſo iſt die Reihe der natürlichen Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. ſ. w. eine arithmetiſche Progreſſion, deren Differenz immer einerley, nämlich 1 iſt.

§. 261. **Lehrſatz.** Die Summen der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Gliedern in einer arithmetiſchen Progreſſion ſind allemal einander gleich. Denn es ſey die Reihe

1	2	3	4	5	6	7
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$
			$a+3d$	$a+2d$	$a+d$	a
			$2a+6d$	$2a+6d$	$2a+6d$	$2a+6d$

ſo iſt die Summe des erſten und ſiebenten, des zweyten und ſechsten, des dritten und fünften, und des vierten Zweyfaches einerley Summe.

§. 262. **Zuſatz.** Wenn die Zahl der Glieder ungerad iſt, ſo iſt das mittelſte vom erſten und letzten gleichweit entfernt, folglich wird ſein Zweyfaches der Summe der beyden äuſſerſten gleich ſeyn.

§. 263. **Lehrſatz.** Das letzte Glied iſt allemal die Summe des erſten, und der in die um eins verminderte Anzahl der Glieder multiplizirten Differenz gleich; denn wenn n die Anzahl der Glieder iſt, ſo iſt

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d & \text{———} & a+(n-1)d. \end{matrix}$$

Die Differenz des dritten Gliedes iſt $2d = (3-1)d$, die vom vierten $3d = (4-1)d$, die vom fünften $4d = (5-1)d$, alſo jedesmal um eins weniger, folglich die vom letzten oder nten Gliede $(n-1)d$, und das letzte Glied ſelbſt $a + (n-1)d$.

§. 264. **Zuſatz.** Wenn die Glieder ſteigen, ſo iſt d poſitiv, fallen ſie, ſo iſt d negativ.

§. 265. **Lehrſatz.** Man kann die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion finden, wenn man die Summe des erſten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplizirt. Denn

$$\text{weil}\quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d \\ & & & a+2d & a+d & a \\ \hline & & & 2a+5d & 2a+5d & 2a+5d \end{array}$$

durch die Addirung der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Glieder halb ſo viel gleiche Paare giebt, als Glieder vorhanden ſind, ſo darf man dieſe gleichen Paare nur zuſammen addiren, um die ganze Summe zu bekommen.

$$\begin{array}{ll} \text{Denn} & 2a + 5d \\ & 2a + 5d \\ & 2a + 5d \\ \hline \text{giebt} & 6a + 15d. \end{array}$$

Dieß aber bekömmt man, wenn man die Summe des erſten und letzten Gliedes durch die halbe Anzahl der Glieder multiplizirt, denn $6a + 15d = (2a + 5d)\frac{6}{2}$.

§. 266. **Zuſatz.** Nach dem allgemeinen Ausdruck, wenn n die Zahl der Glieder iſt, wird alsdann das letzte Glied heiſſen $a + (n - 1)d$, die Summe $= (2a + (n - 1)d)\frac{1}{2}n$.

§. 267. **Zuſatz.** Man hat alſo die Differenz, das erſte Glied, das letzte Glied, die Anzahl der Glieder, und die Summe der Glieder; wenn nun von dieſen fünf Dingen drey gegeben ſind, ſo kann man allemal die zwey übrigen finden. Z. E. Aus dem erſten Gliede, der Anzahl der Glieder und der Differenz, die Summe; denn wenn die obigen Stücke d, a, u, n und S heiſſen, ſo iſt $S = (a + u)\frac{1}{2}n$, die Anzahl der Glieder mag

gerade oder ungerade ſeyn. 2) $u = a + (n - 1)d$. 3) $n = \frac{2S}{a + u}$. 4) $d = \frac{u - a}{n - 1}$ 5) $a = u - (n - 1)d$. Man ſiehet auch zugleich, daß man aus jeder Vergleichung noch mehrere Werthe herausbringen könne (*).

(*) Z. B. aus der zweyten Formel

1) $u = a + (n - 1)d$ oder $u = a + nd - d$

2) iſt $u - nd + d = a$

——— und

3) $\frac{u - a + d}{d} = n$

——— und

4) $\frac{u - a}{n - 1} = d$; die hier angeführte vierte Formel.

5) Aus der erſten $S = (a+u)\frac{1}{2}n = \frac{an + un}{2}$ ergiebt ſich

6) $\frac{2S - un}{n} = a = \frac{2S}{n} - u$

——— und

7) $\frac{2S - an}{n} = u = \frac{2S}{n} - a$

8) $\frac{2S}{a + u} = n$ die hier angeführte dritte Formel.

Wenn man die beyden Formeln für a mit einander vergleicht N. 2 u. 6; ſo entſteht

$$u - nd + d = \frac{2S}{n} - u$$

——— oder

$$un - n^2d + nd = 2S - un$$ Hieraus findet man

9) $S = \frac{2un - n^2d + nd}{2}$

10) $u = \frac{2S + n^2d - nd}{2n}$

11)

11) $d = \frac{2un - 2S}{n^2 - n}$

12) $n = \sqrt{\left(\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2S}{d}\right)} - \frac{u}{d} - \frac{1}{2}$

Vergleicht man die 1 u. 7te; ſo daß man u eliminire, ſo iſt $nd - d + a = \frac{2S}{n} - a$ oder

$n^2 d - nd + an = 2S - an$ woraus ſich herleiten läßt:

13) $S = \frac{n^2 d - nd + 2an}{2}$

14) $a = \frac{2S - n^2 d + nd}{2n} = \frac{S}{n} - \frac{nd}{2} + \frac{d}{2}$

15) $d = \frac{2S - 2an}{n^2 - n}$

16) $n = \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)} - \frac{a}{d} + \frac{1}{2}$

Endlich aus der 3ten und 8ten entſteht

$\frac{u - a + d}{d} = \frac{2S}{a + u}$ oder nach aufgehobnen Brüchen

$u^2 - a^2 + ad + ud = 2Sd$

17) $S = \frac{u^2 - a^2 + ad + ud}{2d}$

18) $d = \frac{u^2 - a^2}{2S - a - u}$

19) $a = \sqrt{\left(u^2 + ud + \frac{1}{4}d^2 - 2Sd\right)} + \frac{1}{2}d$

20) $u = \sqrt{\left(2Sd + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2\right)} - \frac{1}{2}d$

Man kann dieſe Formeln jetzt überſchlagen, bis man die Lehre von den Gleichungen durchgangen hat; alsdann werden ſie, voraus jene, in denen unreine quadratiſche Gleichungen vorkommen, zur Uebung, und Anwendung der alldort zu gebenden Regeln von ungemein groſſen Nutzen ſeyn.

§. 268. **Anmerk.** Die Summe aller natürlichen Zahlzeichen von 1 bis 100, iſt alſo $(1 + 100)\frac{1}{2}100 = 101 . 50 = 5050$ Eben ſo die von 1 bis 1000000 iſt $= (1000000+1). \frac{1000000}{2}$ $= 500000500000$. Weil ferner alle ungerade Zahlen um 2 von einander unterſchieden ſind, z. E. 1, 3, 5, 7 u. ſ. w. ſo iſt von n ungeraden Zahlen das letzte Glied oder $u = 1 + (n-1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$, folglich $S = (1 + 2n - 1)\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n + 2n . \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n = (2n)\frac{1}{2}n = \frac{2n^2}{2} = n^2$: (*) Die Summe der erſten hundert ungeraden Zahlen iſt alſo $100 . 100 = 10000$, und die hundertſte ungerade Zahl $= 200 - 1 = 199$.

Die geometriſchen Proportionen.

§. 269. **Erklär.** Die Gleichheit zwoer geometriſchen Verhältniſſe iſt eine geometriſche **Proportion**; wenn das zweyte Glied mit dem dritten einerley iſt, ſo heißt ſie **zuſammenhangend** (continua); ſind beyde mittlere Glieder aber verſchieden, ſo iſt ſie **diſkret**; (diſcreta). Das erſte und dritte, wie auch das zweyte und vierte Glied nennt man **gleichnamige** oder **gleichliegende Glieder** (homologa).

§. 270. **Lehrſatz.** Der allgemeine Ausdruck für alle geometriſchen Proportionen iſt $a : ma = b : mb$; oder wenn ſie zuſammenhangend iſt, $a : ma = ma : m^2a$; wo *m* das vielfache bedeutet. Denn *a* iſt in *ma* ſo vielmal enthalten als *b* in *mb*, oder als ma in mma; das iſt aber die Erklärung der geometriſchen Proportionen, daß das erſte Glied im zweyten ſo oft, als das dritte im vierten oder umgekehrt enthalten ſey; folglich zeigt der gegebene Ausdruck alle nur möglichen geometriſchen Proportionen an.

§. 271.

(*) D. i. die Summe einer Reihe von ungeraden Zahlen iſt dem Quadrate der Anzahl der Glieder gleich.

§. 271. **Zuſatz.** Das Produkt der beyden äuſſerſten und mittlern Glieder in einer geometriſchen Proportion iſt einander gleich; denn $a . mb = ma . b$; oder $amb = mab$; und wenn die Produkte gleich ſind, ſo iſt die Proportion geometriſch.

§. 272. **Zuſatz.** Wenn man das Produkt der zwey mittlern mit dem erſten dividirt, ſo findet man das vierte Glied, und kraft der (§. 275.) erlaubten Verſetzung, da ein jedes Glied zum vierten werden kann, aus drey gegebenen Stücken allemal das vierte.

Denn $\frac{amb}{a} = mb$, und $\frac{amb}{mb} = a$, und $\frac{amb}{am} = b$, und $\frac{amb}{b} = am$.

§. 273. **Zuſatz.** Weil in einer zuſammenhangenden Proportion die beyden mittleren Glieder einander gleich ſind, ſo iſt das Produkt des mittlern in ſich ſelbſt, das iſt, ſein Quadrat dem Produkt der beyden äuſſerſten gleich; man findet alſo das mittlere Glied, wenn man aus dem Produkt der beyden äuſſerſten Glieder die Quadratwurzel ausziehet.

§. 274. **Zuſatz.** In einer ſtätigen Proportion kann man dahero aus zwey gegebenen Gliedern ſchon das dritte finden, es mag das mittlere oder eines der äuſſerſten geſucht werden (*).

§. 275. **Lehrſatz.** Die geometriſchen Proportionen laſſen ſich theils durch die Verſetzung der Glieder, theils durch die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Diviſion, Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzel verändern, ſo daß jedesmal eine wahre geometriſche Proportion wieder herauskömmt, welche man daran erkennet,

weil

(*) Denn der Ausdruck für eine ſtätige geometriſche Proportion iſt (nach §. 270.) $a : ma = ma : m^2a$; es iſt alſo:

$\frac{m^2a^2}{m^2a} = a$ das erſtere; $\sqrt{m^2a^2} = ma$ das mittlere u.

$\frac{m^2a^2}{a} = m^2a$ das dritte Glied der Proportion.

weil die Produkte der äuſſerſten und mittlern Glieder immer gleich ſind, oder weil das erſte Glied im zweyten ſo oft, als das dritte im vierten enthalten iſt.

§. 276. **Erläuter.** Folgende Exempel, welchen der allgemeine Beweis jedesmal in Buchſtaben beygeſetzt iſt, werden die Sache deutlich machen. Es ſey die Hauptproportion, die verändert werden ſolle,

$$a : ma = b : mb \qquad 2 : 6 = 4 : 12$$

ſo iſt I. Permutando vel Viciſſim oder die mittleren verwechſelt.

$$a : b = ma : mb \qquad 2 : 4 = 6 : 12$$

II. Invertendo oder umgekehrt.

$$ma : a = mb : b \qquad 6 : 2 = 12 : 4$$

$$mb : b = ma : a \qquad 12 : 4 = 6 : 2 \quad (*)$$

III. Componendo oder zuſammengeſetzt:

$$\left\{\begin{array}{ll} a : ma + a = b : mb + b & 6 : 2 + 6 = 12 : 4 + 12 = \\ a + ma : a = b + mb : b & 6 + 2 : 6 = 12 + 4 : 12 = \\ a + ma : ma = b + mb : mb & 6 + 2 : 2 = 12 + 4 : 4 \\ a + b : b = ma + mb : mb & 6 + 12 : 12 = 2 + 4 : 4 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 6 : 8 = 12 : 16 \\ 8 : 6 = 16 : 4 \\ 8 : 2 = 16 : 12 \\ 18 : 12 = 6 : 4 \end{array}\right.$$

IV. Subtrahendo vel differentiando oder durch die Subtraktion.

$$\begin{array}{ll} a : a - ma = b : b - mb & 6 : 6 - 2 = 12 : 12 - 4 \\ a - ma : ma = b - mb : mb & 6 - 2 : 2 = 12 - 4 : 4 \\ a - b : b = ma - mb : mb. & 6 - 12 : 12 = 2 - 4 : 4 \end{array} \left\{\begin{array}{l} 6 : 4 = 12 : 8 \\ 4 : 2 = 8 : 4 \\ 6 : 12 = 2 : 4 \end{array}\right.$$

V. Multiplicando & dividendo, wenn man eine oder beyde Verhältniſſe mit einer dritten Zahl multiplizirt oder dividirt.

$$\left\{\begin{array}{ll} ac : mac = b : mb & 6.3 : 2.3 = 12 : 4 \\ a : ma = bc : mbc & 6 : 2 = 12.3 : 4.3 = \\ ac : mac = bd : mbd & 6.3 : 2.3 = 12.2 : 4.2 = \\ ac : mac = bc : mbc & 6.3 : 2.3 = 12.3 : 4.3 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 18 : 6 = 12 : 4 \\ 6 : 2 = 36 : 12 \\ 18 : 6 = 24 : 8 \\ 18 : 6 = 36 : 12 \end{array}\right.$$

Ferner

(*) Hiebey kann man die Veränderung (N. I.) wieder anbringen, nämlich

$$ma : mb = a : b \text{ und } mb : ma = b : a;$$

macht man aber b zum erſten Gliede, ſo hat man noch um zwo Veränderungen mehr $b : a = mb : ma$ und $b : mb = a : ma$. oder in Zahlen

$$6 : 12 = 2 : 4, \quad 12 : 6 = 4 : 2, \quad 4 : 2 = 12 : 6; \text{ u. } 4 : 12 = 2 : 6.$$

Ferner:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb & \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = 12:4 \\ a : m = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c}, & 6 : 2 = \frac{12}{2} : \frac{4}{2} \\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d} & \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{3} : \frac{4}{3} = \\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c} & \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{2} : \frac{4}{2} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 3 : 1 = 12 : 4 \\ 6 : 2 = 6 : 2 \\ 3 : 1 = 4 : \frac{4}{3} \\ 3 : 1 = 6 : 2 \end{array}\right.$$

VI. Durch Erhebung zu Potenzen, da man alle vier Glieder zu einerley Potenz erhebt:

$$\left.\begin{array}{ll} a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2 & 6^2 : 2^2 = 12^2 : 4^2 \\ a^n : m^na^n = b^n : m^nb^n & 6.6 : 2.2 = 12.12 : 4\,4 \end{array}\right\} 36 : 4 = 144 : 16.$$

nicht aber

$$a^2 : m^2a^2 = b : mb$$

oder $a^2 : m^2a^2 = b^3 : m^3b^3$ Weil hier nicht einerley Produkte beym Multipliziren der äuſſerſten und mittlern Glieder herauskommen; denn a^2mb iſt dem Produkt m^2a^2b nicht gleich; ſo auch $a^2 . m^3b^3$ iſt was ganz anders als $m^2a^2b^3$.

VII. Durch Ausziehung der Wurzeln, wo man aus allen vier Gliedern einerley Wurzel extrahirt.

$$\sqrt{a^2} : \sqrt{m^2a^2} = \sqrt{b^2} : \sqrt{m^2b^2}$$

$$\sqrt[n]{a^n} : \sqrt[n]{m^na^n} = \sqrt[n]{b^n} : \sqrt[n]{m^nb^n}$$

$$\sqrt{36} : \sqrt{4} = \sqrt{144} : \sqrt{16}$$

$$6 : 2 = 12 : 4$$

Das iſt die erſte Proportion wieder.

§. 277. **Lehrſatz.** Wenn zwo Proportionen mit einander ſo übereinkommen, daß zwo Verhältniſſe davon einer und eben derſelben dritten Verhältniß gleich ſind, ſo kömmt auf eine dreyfache Weiſe die dritte Proportion heraus. Denn I. entweder ſind die zween erſten Paare Glieder, oder welches nach dem vorigen Lehrſatz von den Verſetzungen gleichviel iſt, die zwey letzten Paare Glieder einander gleich; II. oder es iſt das erſte und dritte, oder zweyte und vierte Paar Glieder,

oder

oder auch nach den Verſetzungen das erſte in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der einen dem vierten in der andern Proportion gleich; III. oder endlich iſt das erſte und letzte Paar, oder das zweyte und dritte Paar Glieder, oder das erſte Paar in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der andern dem vierten in der erſten Proportion gleich. Im erſten Fall ſchließt man ex æquo, überhaupt; im zweyten ordinatim, im dritten perturbate.

§. 278. **Erläuter.** Die folgenden Exempel, die man ſich wohl bekannt machen muß, werden das geſagte erläutern, wo der Beweis in Buchſtaben dabey ſteht.

I. Fall: ex æquo Simpliciter.

$a : ma = b : mb$	$4 : 8 = 3 : 6$
$a : ma = c : mc$	$4 : 8 = 5 : 10$
$b : mb = c : mc$	$3 : 6 = 5 : 10$

II. Ordinatim ex æquo.

1) $a : ma = b : mb$	$4 : 12 = 2 : 6$
$mna : ma = mnb : mb$	$10 : 12 = 5 : 6$
$a : mna = b : mnb.$	$4 : 10 = 2 : 5$
2) $a : ma = b : mb$	$5 : 15 = 2 : 6$
$ma : mna = mb : mnb$	$15 : 30 = 6 : 12$
$a : mna = b : mnb.$	$5 : 30 = 2 : 12$

III. Perturbate ex æquo;

1) $a : ma = b : mb$	$4 : 2 = 12 : 6$
$mna : ma = b : \frac{b}{n}$	$8 : 2 = 12 : 3$
$a : mna = \frac{b}{n} : mb.$	$4 : 8 = 3 : 6$
2) $a : ma = b : mb$	$4 : 2 = 12 : 6$
$ma : mna = \frac{b}{n} : b$	$2 : 8 = 3 : 12$
$a : mna = \frac{b}{n} : mb.$	$4 : 8 = 3 : 6$

§. 279.

§. 279. **Lehrſ.** Wenn man ganz verſchiedene geometriſche Proportionen mit einander multiplizirt oder dividirt, ſo kommen wiederum geometriſche Proportionen heraus, worinnen nur immer gleichnamige Glieder bey den vier Rechnungsarten verbunden werden.

Es ſey gegeben	$a : ma = b : mb$	$5 : 10 = 2 : 4$
	$c : nc = g : ng$	$3 : 6 = 4 : 8$
I. Multipl.	$ac : mnac = bg : mnbg$	$15 : 60 = 8 : 32$
II. Dividirt	$\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{g} : \frac{mb}{ng}$	$\frac{5}{3} : \frac{10}{6} = \frac{2}{4} : \frac{4}{8}$

§. 280. **Zuſatz.** Wenn die Proportionen einerley Verhältniß haben, ſo wird noch eine Proportion herauskommen, wenn man die gleichnamigen Glieder addirt oder ſubtrahirt; denn

$$a : ma = b : mb$$
$$c : mc = d : md$$
giebt
$$a + c : m(a + c) = b + d : m(b + d)$$
$$2 : 4 = 3 : 6$$
$$5 : 10 = 1 : 2$$
$$7 : 14 = 4 : 8.$$

Iſt aber die Verhältniß verſchieden, ſo geht die Addition und Subtraktion nicht an; die Multiplikation und Diviſion hingegen iſt in allen Fällen richtig (*).

(*) Ein ſehr brauchbarer Satz der Lehre von den Proportionen würde hier nicht am unrechten Orte ſtehen; er heißt ſo: *Wenn mehrere gleiche Verhältniſſe auf einander folgen, ſo verhält ſich die Summe aller vorhergehenden Glieder zur Summe aller nachfolgenden, wie jedes vorhergehende Glied ſich zu ſeinem nachfolgenden verhält.* D. i. Wenn

$$a : b = c : d = e : f = g : h \text{ \&c. ſo iſt}$$

$$a + c + e + g : b + d + f + h = a : b; \text{ oder } = c : d \text{ \&c.}$$

Ver

Beweis. Weil in einem jeden geometriſchen Verhältniſſe das nachfolgende Glied das Produkt des vorhergehenden in dem Exponenten des Verhältniſſes iſt; ſo iſt, wenn m der Exponent iſt, die obige Reihe gleicher Verhältniſſe

$$a : am = c : cm = e : em = g : gm \text{ \&c.}$$

Es iſt alſo die Summe aller vorhergehenden $= a + c + e + g$; und die Summe aller nachfolgend. $= am + cm + em + gm$; es iſt alſo

$$a + c + e + g : am + cm + em + gm = a : am$$

denn die Produkte der äuſſern und mittlern Glieder ſind gleich:

$$a^2m + acm + aem + agm = a^2m + acm + aem + agm$$

welches die Eigenſchaft der geometriſchen Proportion iſt. Setzt man nun ſtatt am, cm &c. ihre Werthe b, d &c. ſo haben wir den Satz, der oben zu erweiſen angenommen worden iſt. (La Caille Elem. Alg. §. 310.; Metzb. Inſt. Math. T. I. Elem. Alg. §. 150.).

§. 281. **Zuſatz.** Wenn bey Proportionen, die in einander multiplizirt werden, zwey nicht homologe Glieder gleich ſind, ſo verhält ſich das Produkt des erſten Paars Glieder zum Produkt des andern Paars, wie das dritte Glied der erſten zum vierten Glied der andern Proportion.

Es ſey

$$\begin{aligned} T : t &= E : v \\ C : c &= v : e \\ \hline CT : tc &= Ev : ev \\ &\qquad : v \end{aligned}$$

So iſt

$$CT : tc = E : e.$$

§. 282. **Anmerk.** Geſetzt nun E und e bedeuten Wirkungen, C und c Urſachen, T und t Zeiten, in welchen die Wirkungen hervorgebracht werden, ſo werden ſich die Wirkungen, wie die Produkte aus den Zeiten in die Urſachen, verhalten: denn wenn die Zeiten gleich ſind: ſo verhalten ſich die Wirkungen wie die Urſachen; und wenn die Urſachen gleich ſind, wie die Zeiten (*).

§. 283.

(*) Weil ſodann T oder C als eine beſtändige Größe = 1 geſetzet werden kann.

§. 283. **Zuſatz.** Wenn drey oder mehrere Proportionen ein ſo gemeinſchaftliches Glied haben, ſo werden die Produkte aller erſten Glieder zu den Produkten aller zweyten Glieder ſich verhalten, wie das dritte Glied der erſten Proportion zum vierten der letzten Proportion.

$$
\begin{array}{l}
a : b = g : h \\
c : d = h : q \\
e : f = q : r \\
\hline
ace : bdf = ghq : hqr \\
\qquad\qquad\quad \overline{\qquad\quad} : hq \\
\hline
ace : bdf = g : r.
\end{array}
$$

§. 284. **Anmerk.** Dieſe Proportion heißt man ſonſten die Kettenregel, wie die unmittelbar vorhergehende die Regel Quinque. Sie dienen, beſonders die Kettenregel, dazu, daß man einen Begriff von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen bekomme, z. E. 3 iſt in 12 viermal, und 12 in 60 fünfmal enthalten; folglich iſt die Verhältniß von 3 zu 60 aus der Verhältniß von 3 zu 12 und 12 zu 60 zuſammengeſetzt, das iſt, 3 ſteckt in 60 viermal fünfmal oder zwanzigmal. Das bisher Vorgetragene muß man ſich vorzüglich bekannt machen, weil die Lehre von der Proportion, wie wir ſchon gemeldet, die Seele der ganzen Mathematik iſt.

Von den geometriſchen Progreßionen oder Reihen.

§. 285. **Erklär.** Eine **geometriſche Reihe oder Progreßion** iſt eine Menge von Zahlen oder Größen überhaupt, die in einer zuſammenhangenden geometriſchen Proportion (Prop. continua) fortgehen. Diejenige Gröſſe oder Zahl, welche anzeigt, wie vielmal das unmittelbar vorhergehende Glied im nachfolgenden enthalten ſey, heißt der **Exponent**, oder auch der **Name der Verhältniß**.

§. 286. **Lehrſatz.** Der allgemeine Ausdruck einer geometriſchen Progreßion, wenn man das erſte Glied = a, den Exponenten = m und die Zahl der Glieder = n ſetzet, wird

folgender ſeyn, wenn man von dem letzten Gliede anfängt und rückwärts ſchreibt:

$m^{n-1}a$, $m^{n-2}a$, $m^{n-3}a$, $m^{n-4}a$, $m^{n-5}a$ u. ſ. w.

Denn man zähle die Glieder und ſchreibe vorwärts

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & ma & m^2a & m^3a & m^4a & m^5a \end{matrix}$$

u. ſ. w. ſo iſt der Exponent des gegebenen Gliedes allemal um eins weniger als die Zahl des Gliedes; z. E. die Progreßion gehe mit dem ſechsten Gliede aus; dieſes Glied heißt m^5a, nun iſt $m^5a = m^{6-1}a$, und wenn die Anzahl der Glieder nämlich $6 = n$ geſetzt wird, ſo iſt $m^5a = m^{6-1}a = m^{n-1}a$; das vorletzte Glied heißt alſo $m^{n-2}a$; u. ſ. f. dahero der gegebene Ausdruck allgemein iſt.

§. 287. **Zuſatz.** Das letzte Glied in einer geometriſchen Progreßion iſt alſo jedesmal $m^{n-1}a$; und wenn man dieſes letzte Glied u nennet, ſo iſt $mu = m^n a$, denn

$m^{n-1}a = u$ nach dem angenommenen Satz.

$m^{n-1}a = \frac{m^n a}{m}$ nach §. 183.

$u = \frac{m^n a}{m}$

$mu = m^n a . m$

Ferner, wenn man eine Potenz m^n durch ihre Wurzel weniger 1 dividirt, ſo wird ſie vergl. mit §. 157. in folgende Reihe verwandelt, $m^n : m - 1 = (m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} \ldots + 1) : m - 1$. *)

§. 288. **Lehrſatz.** Die Summe einer geometriſchen Proportion iſt jedesmal $\frac{a - mu}{1 - m}$, wo a das erſte Glied, m den Exponenten und u das letzte Glied bedeutet.

Be-

*) Denn wenn n beſtimmt iſt, und die Anzahl der Diviſionen der Anzahl der Einheiten in dem Werthe von n gleich wird, ſo wird $m^{n-n} = m^0 = 1$, und es bleibt alſo zum letzten Gliede $+ \frac{1}{m-1}$.

Beweis.

$$\frac{1}{1-m} = 1+m+m^2+m^3 \cdots\cdots + \frac{m^n}{1-m} \text{ nach §. 157.}$$

$$\frac{m^n}{1-m} = \frac{m^n}{1-m} \text{ ſubtrah.}$$

$$\frac{1}{1-m} - \frac{m^n}{1-m} = 1+m+m^2+m^3 \cdots\cdots \text{ das iſt, weil die Nenner gleich nach §. 155.}$$

$$\frac{1-m^n}{1-m} = 1+m+m^2+m^3 \text{———}$$

$$\text{—————} .a$$

$$\frac{a-m^n a}{1-m} = a+ma+m^2a+m^3a \text{———}$$

$$m^n a = mu \text{ nach §. 287. ſubſtituirt}$$

$$\frac{a-mu}{1-m} = a+ma+m^2a+m^3a. \text{———}$$

§. 289. **Zuſatz.** Wenn die Progreßion abnimmt oder fällt, das iſt, wenn die folgende Glieder immer kleiner werden, ſo iſt m ein eigentlicher Bruch, folglich Zähler und Nenner poſitiv; wenn ſie aber ſteigt, oder die nachfolgende Glieder immer gröſſer werden, ſo iſt m ein uneigentlicher Bruch, folglich Zähler und Nenner negativ; der Quotient aber dennoch poſitiv, nach §. 151.

§. 290. **Zuſatz.** Aus dem erſten und zweyten Gliede, oder aus dem erſten Gliede und dem Exponenten kann man alle folgende Glieder durch die Regel §. 274. die man ſonſt die Regel de Tri heißt, finden.

§. 291. **Zuſatz.** Wenn die Summe = S, das erſte Glied = a, das letzte = u, der Exponent = m, und die Anzahl der Glieder = n geſetzt werden, ſo kann man nach dieſen fünf Benennungen fünf Aufgaben auflöſen, da man aus drey gegebenen Stücken von dieſen fünf allemal die zwey

übrigen findet; einige davon werden logarithmiſch aufgelöſet; davon in folgendem gehandelt wird.

§. 292. **Zuſatz.** Wenn das zweyte Glied $= b$, ſo iſt der Exponent $= \frac{b}{a}$; denn im allgemeinen Ausdruck iſt das zweyte Glied ma, folglich hier

$$ma = b$$
$$\overline{\quad\quad} : a$$

$m = \frac{b}{a}$ man kann alſo den Exponenten finden und wegſchaffen.

§. 293. **Zuſatz.** Wenn das erſte Glied nicht eins iſt, ſo darf man nur alle Glieder durch das erſte Glied dividiren; man wird alsdann eine Reihe bekommen, die einerley Verhältniß mit der vorigen hat.

$a, ma, m^2a, m^3a,$ — — oder 7, 14, 28, 56, 112
$1 \quad m \quad m^2 \quad m^3,$ 1, 2, 4, 8, 16.

Die Reihe 1, 2, 4, 8 u. ſ. w. hat eben die Verhältniß, welche 7, 14, 28, 56 hat; daher man in Anſehung der Verhältniß alle Reihen auf ſolche reduziren kann, deren erſtes Glied 1 iſt.

§. 294. **Zuſatz.** Wenn das erſte Glied 1, das zweyte m iſt, ſo enthält die Reihe lauter Potenzen von m, oder vom zweyten Gliede.

§. 295. **Zuſatz.** In einer geometriſchen Reihe ſind die Produkte der äuſſerſten und der von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Glieder gleich, z. E. 1, 2, 4, 8, 16, 32. wo $1 . 32 = 2 . 16 = 4 . 8$. nach §. 271. 273.

§. 296. **Lehrſatz.** Wenn man die Summe einer geometriſchen Progreßion von Brüchen, deren Zähler 1 iſt, S, und den Nenner des erſten Bruchs a nennt, ſo iſt $S = \frac{1}{a-1}$,

wenn

wenn die Zeichen nicht abwechſeln; hingegen $S = \frac{1}{a+1}$, wenn die Zeichen **plus** und **minus** abwechſeln.

Bew. I. Fall.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} \cdots = S \quad |\,.\,a$$

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \cdots = aS$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \cdots = S \text{ ſubt.}$$

$1 = aS - S$ das iſt

$$1 = (a - 1)\,S \quad |\,:\,a - 1$$

$$\frac{1}{a-1} = S.$$

Bew. II. Fall.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \cdots = S \quad |\,.\,a$$

$$1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} - = aS$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \cdots = S \text{ add.}$$

$1 = aS + S$ oder

$$1 = (a + 1)\,S \quad |\,:\,a + 1$$

$$\frac{1}{a-1} = S.$$

§. 297. **Lehrſatz.** Wenn man das vorhergehende Glied von dem nächſtfolgenden immer abzieht, ſo wird die Progreſſion der Differenzen wieder eine geometriſche Progreßion ſeyn, die den vorigen Exponenten hat.

Beweis.

Die Progreßion iſt a, ma, m^2a, m^3a, m^4a — — — $m^{n-1}a$ —

ihr Unterſchied $ma - a, m^2a - ma, m^3a - m^2a, m^4a - m^3a$ - - - -

d. i. nach §. 148. $(m-1)a, m(m-1)a, m^2(m-1)a, m^3(m-1)a$ - -

alſo wieder eine geometriſche Progreßion von einerley Exponenten.

§. 298. **Zuſatz.** Man kann die zwote, dritte, vierte Reihe der Unterſchiede eben ſo finden, da allemal eine ähnliche geometriſche Progreßion herauskommen wird. Z. E.

Hauptreihe:	1,	3,	9,	27,	81,	243.
I. Differenzreihe		2,	6,	18,	54,	162.
II. Differenzreihe			4,	12,	36,	108.
III. Differenzreihe				8,	24,	72.
IV. Differenzreihe					16,	48.

Von den Logarithmen.

§. 299. **Erklär.** Wenn man unter eine geometriſche Progreßion, die mit 1 anfängt, eine arithmetiſche ſchreibet, deren erſtes Glied = 0, ſo enthält die zwote Reihe die **Logarithmen** der erſtern Reihe.

§. 300. **Zuſatz.** Die Möglichkeit dieſer Erklärung iſt an ſich klar; denn beyde Gattungen von Progreßionen ſind möglich; folglich auch das, was daraus folget; wir werden aber ſogleich zeigen, daß die Logarithmen nicht anders als auf dieſe Weiſe betrachtet werden können.

§. 301. **Lehrſatz.** Die logarithmiſche Reihe muß nothwendig mit einer Nulle anfangen, wenn das erſte Glied der geometriſchen Proportion eins iſt; denn die Progreßion ſey 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 u. ſ. w. ſo iſt der Exponent von $1 = 0$, weil $1 = a^0$, der von $a = 1$, der von $a^2 = 2$ u. ſ. w. nun ſind dieſe Exponenten die Zahlen der Verhältniſſe, oder die Logarithmen, welche anzeigen, wie vielmal das erſte Glied nach 1 in den folgenden enthalten ſeye; z. E. das vierte Glied enthält a dreymal, alſo iſt ſein Logaritbme $= 3$, das nte Glied enthält das nächſte nach dem erſten $(n - 1)$mal; folglich muß die logarithmiſche Reihe mit 0 anfangen, wenn das erſte Glied der geometriſchen Reihe = 1 iſt.

§. 302. **Zuſatz.** Weil alle geometriſchen Progreßionen, das erſte Glied mag ſeyn was es will, durch die Diviſion des erſten Gliedes, auf eine ſolche gebracht werden können, deren erſtes Glied eins wird nach §. 293. und zwar ſo,

ſo, daß das Verhältniß unverändert bleibt, ſo kann man die Logarithmen für alle möglichen Progreßionen in ganzen Zahlen gebrauchen.

§. 303. **Zuſatz.** Und weil eine gebrochene Zahl durch einen negativen Exponenten ausgedrückt wird, ſo kann man auch für die rückwärts fortgeſetzte Reihe in Brüchen Logarithme finden; denn es ſey

$\frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, a^4$ — — ſo ſind die Logar.

$-4, -3, -2, -1\ 0, 1, 2, 3, 4$ — —

weil $\frac{1}{a^4} = a^{-4}$, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$, $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ u. ſ. w. nach §. 180.

§. 304. **Anmerk.** Man ſiehet aus der Benennung, die die erſten Erfinder den Logarithmen gegeben, daß ſie nach dieſen Begriffen ſich gerichtet haben; denn λογων αριθμος heißt die Zahl der Verhältniſſe.

§. 305. **Lehrſatz.** Der Logarithme des Produkts iſt die Summe der Logarithmen der Faktoren, und der Logarithme des Quotienten iſt die Differenz der Logarithmen vom Dividendus und Diviſor. Denn $x^m . x^r = x^{m+r}$, nun iſt m der Logarithme von x^m und r der Logarithme vor x^r, alſo iſt die Summe $m + r$ der Exponent, das iſt, der Logarithme des Produkts; ferner $x^{m+r} : x^r = x^{m+r-r} = x^m$; nun iſt $m + r$ der Logarithme des Dividendus, r der Logarithme des Diviſors, und m der Logarithme des Quotienten; aber m iſt die Differenz der beyden Logarithme $m + r$, und r; folglich wird in der Diviſion der Logarithme des Diviſors vom Logarithme des Dividendus abgezogen, was übrig bleibt, iſt der Logarithmus des Quotienten.

§. 306. **Lehrſatz.** Weil die Erhebung zu Potenzen durch eine Multiplikation des Exponenten in den gegebenen Grad der Potenz, und die Ausziehung der Wurzel durch eine Diviſion des Exponenten durch den gegebenen Grad der Wurzel geſchieht, die Logarithmen aber die Exponenten ausdrü-

cken, ſo darf man nur im erſten Falle den Logarithmen der Potenz in den gegebenen Grad multipliziren, im letzten Falle aber dadurch den Logarithmen dividiren.

§. 307. Exempel. Es ſey die Reihe
Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.
Arithm. oder
Logarithm. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Man verlangt das Produkt von 4 . 16, ſo addirt man die Logarithmen, die den Faktoren korreſpondiren, ſie ſind 2 und 4, die Summe 6 korreſpondirt dem Produkte 64; man verlangt das Produkt von 8 . 16, ſo addirt man die korreſpondirenden Logarithmen 3 und 4, der Summe 7 korreſpondirt das Produkt 128; ferner man verlangt den Quotienten von 8 in 128; der Dividendus iſt 128, der Diviſor 8; des erſten Logarithme 7, des letztern 3; ziehet man nun dieſen von erſten ab, ſo hat man 7 — 3 = 4, den Logarithmen des Quotienten, welchem 16 korreſpondirt. Wie man die Zahlen, die zwiſchen 2 und 4, und 4 und 8, 8 und 16 u. ſ. w. fallen, und ihre korreſpondirenden Logarithmen ſuchen, und hernach die Rechnung auf alle nur mögliche Fälle anwenden könne, wollen wir ſogleich anführen. Man verlangt die dritte Potenz von 4; der Logarithme von 4 iſt 2, dieſer mit 3 multiplizirt giebt 6; dem korreſpondirt die Potenz 64; man verlangt die ſiebente Potenz von 2; der Logarithme von 2 iſt 1, dieſer mit 7 multiplizirt giebt 7, welchem die Potenz 128, als die ſiebente Potenz von 2 korreſpondirt; endlich man verlangt die Kubikwurzel aus 64; der Logarithme von 64 iſt 6, dieſer durch die Zahl der Wurzel dividirt, giebt den Logarithmen 2, dem die Wurzel 4 korreſpondirt; alſo $4 = \sqrt[3]{64}$.

§. 308. Zuſatz. Wenn man alſo in der Buchſtabenrechnung den Logarithmen von x^3 geben will, ſo heißt er $3lx$, der von $x^n = nlx$, der von $x^{n+r} = (n+r)lx$; und wenn man die Logarithmen der Wurzel verlangt, ſo iſt z. E. $\sqrt[4]{x^1} = lx^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}lx$, $\sqrt[n]{x^m} = lx\frac{m}{n} = \frac{m}{n}lx$.; oder bey der Multiplikation der Logarithmen von $xy = lx + ly$, der von $xyz = lx + ly + lz$; und bey der Diviſion der Logar. von $\frac{x}{z} = lx - lz$, der von $\frac{x}{y^2} = lx - 2ly$.

§. 309.

§. 309. **Lehrſatz.** Man kann die Logarithmen derjenigen Zahlen, die zwiſchen die Potenzen hineinfallen, durch Näherung ſo finden, daß der Fehler nicht merklich iſt. Denn es ſeyen zwo nächſte Potenzen x^m und x^{m+1}, man ſuche die mittlere Proportionalzahl, die wir p nennen wollen, ſo iſt nach §. 273., $p = \sqrt{x^{m+1}x^m} = \sqrt{x^{m+1+m}} = \sqrt{x^{2m+1}}$ nach §. 176. $= x^{\frac{2m+1}{2}}$ nach §. 189. Der Exponent iſt alſo $\frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}$ und eben dieſer Exponent iſt auch der Logarithme. Will man zwiſchen dieſem und dem vorigen Gliede abermal die mittlere Proportionalzahl ſuchen, ſo iſt ſie $\sqrt{x^{m+1} x^{\frac{2m+1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{2m+1}{2} + m+1}} = \sqrt{x^{\frac{2m+1}{2} + \frac{2m+2}{2}}}$ nach §. 155. $= \sqrt{x^{\frac{4m+3}{2}}} = x^{\frac{4m+3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{4m+3}{2 \cdot 2}} = x^{m+\frac{3}{4}}$; der Exponent iſt alſo $m + \frac{3}{4}$, und eben dieſer Exponent iſt auch der Logarithme dieſer mittlern Proportionalzahl. Auf dieſe Weiſe kömmt man den wahren Ausdrucke der dazwiſchen liegenden Glieder immer näher, doch nie ſo nahe, daß gar nichts mehr fehlen ſollte.

§. 310. **Willk. Satz.** Man hat in den logarithmiſchen Tabellen die geometriſche Reihe nach der dekadiſchen Progreßion

1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,

angenommen, weil ſie die bequemſte iſt; unerachtet man eine jede andere auch hätte annehmen können. Die Logarithme der dazwiſchen fallenden Glieder hat man nach obigem §. 309. mit erſtaunlicher Mühe in Dezimalbrüchen berechnet, aber ſo, daß nur die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, alſo von 1 bis 100000, oder hundert tauſend Zahlen nur ſechſe ſich befinden, die genaue und nach mathematiſcher Schärfe richtig übereinſtimmende Logarithmen haben, unerachtet auf dieſen nur beynahe wahren Dingen alle aſtronomiſche Rechnungen, und überhaupt, wo nicht der größte, doch der wichtigſte Theil der angewandten Mathematik beruhet. Doch ſind die Fehler,

wie wir oben gemeldet haben, ſo klein, daß ſie ſonſt nirgend, als bey der geometriſchen Genauigkeit, den Namen eines Fehlers verdienen würden. Weil die Logarithmen in zehntheiligen Brüchen gefunden werden, ſo beſteht ein jeder aus einer ganzen Zahl oder ſtatt des Zahlzeichens einer 0, und aus Brüchen; das ganze Zahlzeichen heißt die **Karakteriſtik** oder die **Kennziffer**; die Zahlen von 1 bis 10 haben die Karakteriſtik 0, die von 10 bis 100 die Karakteriſtik 1, die von 100 bis 1000 die Karakteriſtik 2 u. ſ. w.

§. 311. **Anmerk.** Der weitere Gebrauch der Logarithmen gehört vornämlich in die Trigonometrie, um deren willen ſie auch zu Anfang des vorigen Jahrhunderts erfunden worden ſind; wir werden daher die Geſchichte davon in der Lehre von der Trigonometrie erſt vortragen; im Folgenden aber hie und da noch Manches einflieſſen laſſen, das zur gründlichen Wiſſenſchaft derſelben, beſonders aus der höhern Geometrie vorgetragen werden kann; wobey wir auch zeigen werden, warum die Logarithmen zu negativen Gröſſen unmögliche Logarithmen oder Gröſſen ſeyen, wie Herr von **Leibnitz** gegen Herrn **Bernouille** behauptet hat (*).

Von den Gleichungen.

§. 312. **Erklär.** Einerley Gröſſe auf verſchiedene Weiſe ausgedrückt, heißt eine **Gleichung**; z. E. 2 . 7 = 10 + 4. Die **Glieder** der Gleichung nennt man diejenige Theile, die durch die vier Rechnungsarten und andere Zeichen zuſammen hangen.

§. 313. **Zuſatz.** Nach den Grundſätzen §. 23. bleibt die Gleichung unverändert, man mag beyderſeits Gleiches addiren, ſubtrahiren, mit Gleichem multipliziren oder dividiren, gleiche Potenzen ſetzen, oder gleiche Wurzel ausziehen, die Zeichen beyderſeits verändern, oder auch durch die Addition und Subtraktion

(*) Auch dort werden wir von einigen neueren Ausgaben der logarithmiſchen Tabellen, und von ihrem Gebrauche umſtändlich handeln.

traktion auf einer Seite endlich die Gleichung auf nichts bringen.

§. 314. **Anmerk.** Dieſe leichte Kunſt läßt ſich am Beſten durch Exempel erläutern. Es ſeye .

I.
$$\begin{aligned} 3a - x &= b \\ x &= x \quad \text{add.} \\ \hline 3a &= b + x \\ b &= b \quad \text{ſubtr.} \\ \hline 3a - b &= x. \end{aligned}$$

II.
$$\begin{aligned} ax &= b \quad :a \\ \hline x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

III.
$$\begin{aligned} \frac{x}{b} &= a \quad .\, b \\ \hline x &= ab \end{aligned}$$

IV.
$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= ab \quad \text{quadr.} \\ \hline x &= a^2b^2 \end{aligned}$$

V.
$$\begin{aligned} x^2 &= a \quad \sqrt{\ }\ \text{extr.} \\ \hline x &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

VI.
$$\begin{aligned} a^2 - bx &= c \quad -c\ \text{ſubtr.} \\ \hline a^2 - bx - c &= 0 \end{aligned}$$

In dieſen ſechs Exempeln ſind nur die gewöhnlichſten Fälle enthalten, die ein jeder Anfänger ſchon verſtehen kann, wenn er nur den 23. §. ſich bekannt gemacht hat. Es giebt aber noch andere Fälle, die nicht ſo leicht ſind, und von denen wir auch im folgenden reden werden. Uebrigens heißt dieſe in der That leichte Kunſt insgemein die **Algebra**.

§. 315. **Erklär.** Eine einfache Gleichung iſt, in welcher die unbekannte Gröſſe, wie x oder y, nur in der erſten Potenz oder Dignität ſich findet.

§. 316. **Zuſatz.** Eine einfache Gleichung iſt alſo leicht aufzulöſen; man nehme das VI. Exempel §. 314.

$$\begin{aligned} a^2 - bx - c &= 0, \\ bx &= bx \\ \hline a^2 - c &= bx \quad ;b \\ \hline \frac{a^2 - c}{b} &= x. \end{aligned}$$

ſo iſt, wenn man bx beyderſeits addirt, die unbekannte Gröſe bald gefunden.

Die ganze Kunſt beſteht darinnen, daß man alle bekannten Glieder auf eine Seite ſchaft, damit das unbekannte Glied auf der andern Seite allein bleibe.

§. 317.

§. 317. **Zuſatz.** Es können in einer einfachen Gleichung auch mehr unbekannte Größen ſich finden, nur darf keine mit der andern multiplizirt werden, weil ſonſt, bey der Auflöſung ſelbſt, Gleichungen herauskommen würden, die nicht mehr einfach ſind.

§. 318. **Anmerk.** Man ſoll z. E. zwo Zahlen finden, deren Summe und Differenz gegeben iſt, das iſt, wenn die geſuchten Zahlen x und y, ihre Summe a, und ihre Differenz b iſt, ſo iſt $x + y = a$, und $x - y = b$. Nun rechne man nach den Grundſätzen §. 23.

$$\begin{array}{ll}
x + y = a & x + y = a \\
x - y = b & x - y = b. \\
\qquad\qquad \text{addirt} & - \; + \quad - \;\; \text{ſubtrahirt} \\
\hline
2x = a + b & 2y = a - b. \\
\hline \quad : 2 & \quad : 2 \\
x = \dfrac{a + b}{2} = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b & y = \dfrac{a - b}{2} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b
\end{array}$$

Die gröſſere Zahl x iſt alſo die halbe Summe zur halben Differenz addirt, die kleinere y die halbe Differenz von der halben Summe ſubtrahirt. Man ſieht aus dieſem und andern Exempeln zur Genüge, daß man zwar allgemeine Regeln zum Rechnen geben kann, bey der Ausübung aber das Meiſte auf den Verſtand und auf den Witz des Rechners ankömmt; daher man neben dem Fleiße natürliche Gaben beſitzen muß, wenn man in der Mathematik, wie in andern Wiſſenſchaften, groß werden will. Das gegebene Exempel könnte auch auf eine andere Weiſe, die aber ungleich langweiliger und verdrüßlicher iſt, berechnet werden; wie ſolches in den **Wolfiſchen** Anfangsgr. der Trigonom. zu ſehen; die hier vorgetragene Rechnung haben **'sGraveſand** und **Newton** gegeben. Das Exempel ſelbſt wählten wir deßwegen, weil es in Folgendem, beſonders in der Trigonometrie, genützet werden ſoll.

Von den quadratiſchen ſowohl reinen als unreinen Gleichungen.

§. 319. **Erklär.** Eine quadratiſche Gleichung iſt, in welcher die unbekannte höchſte Potenz ein Quadrat iſt; ſie iſt **rein**, wenn die höchſte unbekannte Potenz als ein Quadrat

drat allein vorkömmt; z. E. $x^2 = a$, oder $3x^2 = b$, folglich $x^2 = \frac{b}{3}$; hingegen wird ſie **unrein**, oder (æquatio quadràtica affecta ſive impura) genannt, wenn noch eine niedrigere Potenz der unbekannten Gröſſe in der Gleichung vorkömmt; z. E. $x^2 + mx = g$, oder $z^2 + z = a$.

§. 320. **Zuſatz.** Weil eine reine quadratiſche Gleichung $x^2 = b$, und $x^2 = +x \,.\, +x$ oder $= -x \,.\, -x$ ſeyn kann, nach §. 209. ſo iſt $x = +$ oder $-\sqrt{b}$; welches man ausdrückt $x = \pm\sqrt{b}$. Die Erklärung von reinen und unreinen Gleichungen gilt von allen auch höhern Gleichungen; ſo iſt $x^3 - ab = 0$ eine reine kubiſche Gleichung; hingegen $x^3 - ax + b = 0$ eine unreine, oder wie man ſonſt ſagt, æquatio affecta.

§. 321. **Lehrſatz.** Eine jede unreine quadratiſche Gleichung läßt ſich auflöſen, wenn man den Koeffizienten der ungleich niedern Potenz halbirt, und das Quadrat dieſer Hälfte beyderſeits addirt, hernach die Wurzel aus der Gleichung auszieht. Denn entweder hat das Quadrat einen Koeffizienten oder nicht; hat es einen, ſo kann man ihn durch die Diviſion wegbringen, hat es aber keinen Koeffizienten, ſo iſt die Regel von ſich ſelbſt klar. Denn der allgemeine Ausdruck iſt

I. $x^2 - mx = g$

$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$ add.

$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + g$

$\sqrt{}$ extr.

$x - \frac{1}{2}m = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}$

$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m$ add.

$x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}$

II. $x^2 + mx = g.$

$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$ add.

$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + g$

$\sqrt{}$ extr.

$x + \frac{1}{2}m = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}$

$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m$ ſubtr.

$x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}.$

§. 322.

§. 322. **Zuſatz.** Wenn der Koeffizient der nächſt niedern Potenz $= 1$, ſo addirt man beyderſeits $\frac{1}{4}$, weil die Hälfte von $1 = \frac{1}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{1}{4}$, z. E.

wo bey z der Koeffizient 1, ob er ſchon nicht ausgedrückt wird, zu verſtehen iſt.

$$z^2 - z = b$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$z^2 - z + \tfrac{1}{4} = b + \tfrac{1}{4}$$

. $\sqrt{}$ extr.

$$z - \tfrac{1}{2} = \pm \sqrt{(b + \tfrac{1}{4})} \text{ und}$$
$$z = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(b + \tfrac{1}{4})}$$

§. 323. **Zuſatz.** Iſt der Koeffizient von z oder der einfachen Potenz ein Bruch, ſo verfährt man wieder nach der Regel; und addirt beyderſeits das Quadrat des halbirten Bruchs.

$z^2 - \frac{1}{3}z = a$, nun iſt $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ und ſein Quadr. $\frac{1}{36}$

$$\tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{36} \quad \text{addirt}$$
$$z^2 - \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{36} = a + \tfrac{1}{36}$$

: $\sqrt{}$ extr.

$$z - \tfrac{1}{6} = \pm \sqrt{(a + \tfrac{1}{36})} \text{ und}$$
$$z = \tfrac{1}{6} \pm \sqrt{(a + \tfrac{1}{36})}.$$

§. 324. **Anmerk.** Dieſe quadratiſchen Gleichungen, beſonders die ſogenannte affectæ oder unreine Gleichungen ſind von groſſen Nutzen, daher man ſich ſolche wohl bekannt machen ſoll; wir wollen ein Exempel geben, wo man alle bisherige Sätze von den Gleichungen alleſamt anbringen kann. Man ſoll zwo Zahlen ſuchen, deren Summen, Produkt, und Differenz der Quadrate gleich oder einerley ſind; die Zahlen ſeyn x oder y, ſo iſt nach der Forderung,

Nr. I. $x + y = xy$

$$x^2 - y^2 = xy$$
$$x + y = x^2 - y^2$$
$$x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y) \text{ nach §. 147.}$$
$$x + y = (x - y) \cdot (x + y)$$

: $x + y$

$$1 = x - y$$
$$y = y \quad \text{add.}$$

Nr. II.

Nr. II. $1 + y = x$

$y = y$

Nr. III. $1 + 2y = x + y$

$x + y = xy$ nach Nr. I.

$1 + 2y = xy$

$x = 1 + y$ nach Nr. II. dieß ſubſtituirt giebt

$1 + 2y = y(1 + y)$

$y(1 + y) = y + y^2$

$1 + 2y = y + y^2$

$y = y$ ſubtrah.

$1 + y = y^2$

$y = y$ ſubtrah.

$1 = y^2 - y$ eine quadratiſche unreine Gleichung.

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ add.

$1 + \frac{1}{4} = y^2 - y + \frac{1}{4}$

$\pm\sqrt{(1 + \frac{1}{4})} = y - \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \pm \sqrt{(1 + \frac{1}{4})} = y.$

und nach Nr. II. iſt $1 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(1 + \frac{1}{4})} = x.$

Von höhern Gleichungen überhaupt.

§. 325. **Erklär.** Bey den höhern Gleichungen, das iſt, bey ſolchen, wo die höchſte Potenz der unbekannten Größe über das Quadrat hinauf ſteigt, hat man, in ſo fern ſie als beſtimmte Gleichungen, oder als ſolche, in welchen nur eine unbekannte Größe, obſchon in verſchiedenen Potenzen, vorhanden iſt, überhaupt betrachtet werden, vornämlich darauf zu ſehen, daß man die Gleichung in eine geſchickte Ordnung bringt; das iſt, die höchſte Potenz ohne alle Koeffizienten zuerſt ſetzet, ſodann die unmittelbar folgende, u. ſ. w. auch diejenigen, welche fehlen, und die man als Potenzen anſiehet, deren Koeffizient Null, oder die in eine 0 multiplizirt ſind, genau bemerkt u. ſ. w.

§. 326. **Zuſatz.** Dieſe Ordnung der Potenzen läßt ſich aus dem 23. §. abermal begreifen; denn wenn die unbekannte größte Potenz mit einer andern Größe dividirt iſt, ſo bringt man den Diviſor durch die Multiplikation hinweg, iſt ſie multiplizirt, ſo bringt man den Multiplikator oder Koeffizienten durch die Diviſion hinweg; u. ſ. w. Die Koeffizienten, die in einerley Potenz multiplizirt ſind, werden als Faktores dieſer Potenz zuſammengeſetzt oder untereinander geſchrieben, damit die Potenz mit ihren Koeffizienten als ein einziges Glied angeſehen werde; und damit die höchſte Potenz das Zeichen + bekomme, wenn ſie vorher — hat, ſo kann man es abermal nach §. 23. die Veränderung der Gleichung unbeſchadet, bewerkſtelligen, und ſie ſelbſt zuletzt auf nichts reduziren u. ſ. w.

§. 327. **Erläuter.** Ein Exempel wird die Sache deutlich machen; man giebt einem die Gleichung, man ſoll ſie ordnen:

$$a - mz = \frac{z}{z^3 - e} + \frac{c}{z^2}$$

man multiplizirt zuerſt beyderſeits mit $z^3 - e$, ſo hat man;

$$\cdot\, z^3 - e$$

$$az^3 - mz^4 - ae + mez = z + \frac{cz^3 - ec}{z^2}$$

man multiplizire ferner mit z^2, ſo hat man

$$\cdot\, z^2$$

$$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = z^3 + cz^3 - ec$$

$$z^3 + cz^3 = z^3 + cz^3 \quad \text{ſubtr.}$$

man bringe die gleiche Potenzen mez^3, z^3, und cz^3 zuſammen auf eine Seite;

$$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 - z^3 - cz^3 = - ec$$

$$mez^3 - z^3 - cz^3 = (me - 1 - c)z^3$$

man drücke die Koeffizienten der gleichen Potenz z^3 ſchicklicher aus, u. ſubſtituire den Ausdruck;

$$az^5 - mz^6 - aez^2 + (me - 1 - c)z^3 = - ec$$

weil mz^6 die höchſte Potenz, ſo dividire man alles mit

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} : m$$

mit m, damit man z^6 ohne Koeffizienten allein bekomme;

$$\frac{az^5}{m} - z^6 - \frac{aez^2}{m} + \frac{(me-1-c)z^3}{m} = -\frac{ec}{m}$$

$$- \quad + \quad + \quad - \quad +$$

man verändere die Zeichen, daß man $-z^6$ poſitiv bekomme; und ſetze z^6 zuerſt, und ſo fort nach der Ordnung der Potenzen.

$$z^6 - \frac{az^5}{m} - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{aez^2}{m} = \frac{ec}{m}$$

$$\frac{ec}{m} = \frac{ec}{m} \text{ ſubtr.}$$

Man bringe die Gleichung auf nichts.

$$z^6 - \frac{az^5}{m} - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{aez^2}{m} - \frac{ec}{m} = 0$$

Man zeige die fehlende Glieder zwiſchen z^3 und z^2 u. ſ. w. durch Sternlein an;

$$z^6 - \frac{az^{5*}}{m} - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{aez^{2*}}{m} - \frac{ec}{m} = 0$$

ſo hat man die Gleichungen richtig geordnet, und das ganze Geſchäfte iſt größtentheils nach den erſten Regeln der Mathematik §. 23. vollendet, daher nur übrig bleibt, daß man die Wurzel ſuchet, davon wir ſogleich reden werden.

§. 329. **Anmerk.** Wenn einer im Rechnen geübt iſt, und gleich überſchauen kann, wie ſich Größen durch die Diviſion, Multiplikation u. ſ. w. aufheben laſſen, ſo kann er eine Gleichung ohne dieſe Regeln ſchnell ordnen, z. E. Es ſey

$$ax = \frac{b^2x - b^3}{z},$$ fällt nun einem gleich ein, daß $b^2x - b^3 = b^2(x - b)$ ſo hat man ſchon die andere ſchickliche Gleichung.

$$ax = \frac{b^2(x-b)}{z}$$ Es ſey ferner

$$x = \frac{az}{x-b}$$ ſo iſt, wenn man Gleiches mit Gleichem multiplizirt

$$axx = \frac{ab^2z(x-b)}{z(x-b)}$$ das iſt

$axx = ab^2$ und $xx = bb$, folglich $x = b$.

Von den Wurzeln der zuſammengeſetzten Gleichungen.

§. 330. **Erklär.** Die **Wurzel** einer Gleichung, die auf Nulle gebracht iſt, heißt dasjenige, was für die unbekannte Gröſſe ſo geſetzt werden kann, daß die Gleichung nach der Hand wieder Nulle bleibt; oder wodurch ſich alle Glieder aufheben und zuſammen o werden. Das was man für die unbekannte Gröſſe z oder x ſetzet, mag hernach eine mögliche oder unmögliche Gröſſe ſeyn.

§. 331. **Lehrſatz.** Eine jede Gleichung hat ſo viel Wurzeln, als der Exponent der höchſten Potenz Einheiten hat, oder wie man ſonſt ſpricht, als die höchſte Potenz Abmeſſungen hat.

Beweis.

Eine jede quadratiſche Gleichung hat 2 Wurzeln; denn von x^2 kann $+x$ und $-x$ die Wurzel ſeyn; alſo hat ſie ſo viel Wurzeln als ſie Abmeſſungen hat. Bey einer kubiſchen Gleichung kann man es ebenfalls zeigen; denn man ſetze

$$\begin{array}{ll} x-a=0 & \\ x-b=0 & \\ \hline x^2-(a+b)x+ab=0 & \text{ſo iſt} \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x-3=0 \\ \hline x^2-5x+6=0 \end{array}$$

Es ſey ferner $x-c=0$ ſo iſt $\qquad x-4=0$

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$$

Da man nun für x ſetzen kann a, b, c, oder in Zahlen 2, 3, 4, und die Gleichung dennoch Nulle bleibt, ſo hat die Gleichung drey Wurzeln; eben ſo beweiſt man es bey der vierten Potenz, daß vier Wurzeln herauskommen.

§. 332. **Zuſatz.** Das letzte Glied der Gleichung iſt das Produkt der Wurzeln; denn abc iſt das Produkt aus den Wurzeln a, b, c; wie 24 das Produkt von 2.3.4.

Die

Die Koeffizienten des zweyten Gliedes ſind die Summe aller Wurzeln, die Koeffizienten des dritten Glieds die Summe der Produkte aus je zwo und zwo Wurzeln u. ſ. w. **Harriot** hat noch bemerkt, daß ſo viel wahre Wurzeln einer Gleichung ſind, als unmittelbare Abwechslungen der Zeichen + und — vorhanden; welche Regel nachgehends Herr geh. Rath von **Segner** bewieſen hat.

§. 333. **Anmerk.** Die Sache läßt ſich auch durch eine reine Gleichung erläutern; es ſey die dritte Potenz von 2 gegeben, welche 8 iſt, folglich iſt $x^3 - 8 = 0$, und weil 2 die Kubikwurzel aus 8, ſo iſt $x - 2$ auch 0. Man dividire nun $x^3 - 8$ durch die Wurzel $x - 2$, ſo iſt

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 8 & x^2 + 2x + 4 \\ (x - 2) & \\ x^3 - 2x^2 & \\ - \quad + & \\ \hline + 2x^2 - 8 & \\ (x - 2) & \\ 2x^2 - 4x & \\ - \quad + & \\ \hline + 4x - 8 & \\ (x - 2) & \\ 4x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Dieſer Quotient iſt = 0, weil 0 mit 0 dividirt nothwendig = 0, folglich iſt

$$\begin{array}{rl} x^2 + 2x + 4 = 0 & \\ 3 = 3 & \text{ſubtr.} \\ \hline x^2 + 2x + 1 = -3 & \\ \hline & \sqrt{\ } \text{extr.} \\ x + 1 = \mp\sqrt{-3} & \\ 1 = 1 & \text{ſubtr.} \\ \hline x = -1 \mp \sqrt{-3}, & \end{array}$$

welches die zwo übrige Wurzeln von 8 ſind, auſſer der poſitiven 2.

Denn wenn man $-1 + \sqrt{-3}$ mit ſich ſelbſt dreymal multiplizirt, ſo iſt $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$, wie $2^3 = 8$; eben ſo iſt auch $-(1 - \sqrt{-3})^3 = 8$ (*).

(*) Denn

$$\begin{array}{r} -1 + \sqrt{-3} \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline +1 - \sqrt{-3} - \sqrt{-3} - 3 \\ \hline +1 - 2\sqrt{-3} - 3 \\ -1 + \sqrt{-3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1+2\sqrt{-3}+3 \\ \quad +\sqrt{-3}-2.-3-3\sqrt{-3} \\ \hline -1+3\sqrt{-3}+3+6-3\sqrt{-3} \\ \hline \quad 9-1=8 \end{array}$$

Eben ſo

$$\begin{array}{l} -1-\sqrt{-3} \\ -1-\sqrt{-3} \\ \hline +1+\sqrt{-3}+\sqrt{-3}-3 \\ \hline +1+2\sqrt{-3}-3 \\ \quad -1-\sqrt{-3} \\ \hline -1-2\sqrt{-3}+3 \\ \quad -\sqrt{-3}-2.-3+3\sqrt{-3} \\ \hline -1-3\sqrt{-3}+3+6+3\sqrt{-3} \\ \hline \quad 9-1=8. \end{array}$$

§. 334. **Zuſatz.** Weil eine jede eingebildete oder unmögliche Wurzel als eine Quadratwurzel angeſehen werden kann (§. 212.), eine ſolche Wurzel aber jedesmal + und — zum Zeichen hat, ſo gehen die eingebildete Wurzeln paarweis; das iſt, wo eine iſt, iſt auch die andere, wo drey auch die vierte, wo fünf auch die ſechste, ſie können daher niemalen in ungerader Zahl vorhanden ſeyn.

§. 335. **Zuſatz.** Eine jede reine Gleichung, nach §. 320. ſie mag ſo viel Abmeſſungen haben als ſie will, hat nur eine wahre mögliche Wurzel, wenn der Exponent ungerade iſt, und zwo entgegengeſetzte gleiche mögliche Wurzeln, wenn er gerade iſt; die übrige ſind alle eingebildet oder unmöglich.

§. 336. **Zuſatz.** Wenn man eins durch die Wurzel aus minus eins dividirt, ſo hat man die negative Wurzel aus

minus

minus eins; das iſt $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$;
denn $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ folglich durch Veränderung der Zeichen
$$-\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = +1$$
$$\overline{\phantom{-\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}}} : \sqrt{-1}$$
$-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$; ein gleichgültiger Ausdruck, der mehremalen vorkömmt.

Die Erfindung der Wurzeln und der Diviſoren einer Gleichung.

§. 337. **Lehrſatz.** Weil das letzte Glied das Produkt der Wurzel iſt, ſo darf man es nur in ſeine Faktoren zerfällen, und einen jeden Faktor in die Stelle der unbekannten Gröſſe ſetzen, damit man ſehe, ob durch dieſe Subſtitution die Gleichung null werde; denn in dieſem Falle iſt der Faktor eine wahre Wurzel. Wird aber die Gleichung nicht null, ſo nimmt man einen andern Faktor, und verſucht die Subſtitution ſo lang, bis die Gleichung null wird.

§. 338. **Zuſatz.** Wenn das letzte Glied ein kleines Produkt iſt, ſo kann man die Wurzel eher finden; iſt es aber ein groſſes Produkt, das viele Faktores hat, ſo wird das Geſchäft weitläuftig.

§. 339. **Anmerk.** Man hat daher noch verſchiedene Methoden je und je erfunden, die aber alle anzuführen, zu weitläuftig wären; uns genüget, die Möglichkeit gezeigt zu haben, wie dieſe Arbeit verrichtet werden kann; doch wollen wir noch einige nennen.

§. 340. **Lehrſatz.** Man kann die Wurzeln ſchneller finden, wenn man vorher ihre Schranken oder Gränzen beſtimmt, zwiſchen welche ſie hinein fallen. Die Schranken aber werden durch die Regeln der Gleichungen nach §. 23. beſtimmt. Z. E. es ſey

$x^2 - 8x + 15 = 0$ ſo iſt	$x^2 - qx + r = 0$
$x^2 + 15 = 8x$ und	$x^2 + r = qx$
$x^2 < 8x$	$x^2 < qx$
——— $: x$	——— $: x$
$x < 8$ ferner weil	$x < q$ ferner weil
$x^2 + 15 = 8x$ ſo iſt	$x^2 + r = qx$ ſo iſt
$15 < 8x$	$r < qx$
——— $: 8$ und	——— $: q$ und
$\frac{15}{8} < x$ folglich ſind $\frac{15}{8}$ und 8 die Gränzen der Wurzel	$\frac{r}{q} < x$: alſo ſind $\frac{r}{q}$ und q die Gränzen.

§. 341. **Zuſatz.** Wenn die Gleichungen kubiſch ſind, ſo kann man die Schranken eben ſo finden:

Es ſey der allgemeine Ausdruck der kubiſchen Gleichung, weil das zweyte Glied jedesmal nach §. 147. kann weggeſchaft werden.

$x^3 - qx + r = 0$	Ferner weil
$x^3 + r = qx$	$x^3 + r = qx$ ſo iſt
$x^3 < qx$	$r < qx$
——— $: x$	——— $: q$
$x^2 < q$	
$x < \sqrt{q}$	$\frac{r}{q} < x$ Demnach ſind die

Schranken der Wurzel $\sqrt{q}$ und $\frac{r}{q}$, wenn die Gleichung kubiſch iſt.

§. 342. **Lehrſatz.** Wenn man eine Gleichung, wie z. E. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat, und man ſetzt ſie einer andern gleich, die in $x + \alpha$ multiplizirt, eben das geben ſolle, ſo kann man die Diviſoren nach Newtons Manier finden. Denn es ſey

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + \alpha)(x^3 + fx^2 + gx + h)$$

das iſt, wenn man wirkl. multipl. $= x^4 + (f + \alpha)x^3 + (g + \alpha f)x^2 + (h + \alpha g)x + \alpha h$, ſo kann man die letzte Gleichung vollkommen durch $x + \alpha$ dividiren, man mag für x ſetzen, was man will,

will, wie der Augenſchein es giebt nach den Diviſionsregeln §. 152. Da dann

$x = 1$ giebt $1 + a + b + c + d$ und der Diviſor $1 + \alpha$
$x = 2$ giebt $16 + 8a + 4b + 2c + d$ — — $2 + \alpha$
$x = 3$ giebt $81 + 27a + 9b + 3c + d$ — — $3 + \alpha$.

Das iſt, die Diviſores gehen in einer arithmetiſchen Progreßion fort.

§. 343. Anmerk. Dieſe Methode ſchreibt ſich vom Newton her, und heißt Methodus Newtoniana inveniendi diviſores æquationum; Herr Clairaut hat dieſen einzigen fruchtbaren Satz zu Grunde gelegt, und den dritten Theil ſeiner Algebra darauf gebauet; man wird dieſen Theil ganz leſen und verſtehen können, wenn man den obigen Lehrſatz verſteht. Man ſehe auch Herrn Prof. Ries Diluc. anal. Finit. Kæſtn. P. I.

Die Veränderung der Gleichungen.

§. 344. Lehrſatz. Man kann bey den Gleichungen die vier Rechnungsarten anbringen, wenn man nur im Subſtituiren eine Fertigkeit beſitzt; welches ſich am beſten durch Exempel erweiſen läßt. Es ſey die Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$. Man ſolle die Wurzel um 3 vermehren und hernach um 2 vermindern, oder man ſolle die Addition und Subtraktion dabey anbringen, ſo ſetze man $x + 3 = y$ und hernach $x - 2 = y$.

I. Addition.	II. Subtraktion.
$x + 3 = y$	$x - 2 = y$
$x = y - 3$	$x = y + 2$
$x^2 = (y-3)(y-3) = y^2 - 6y + 9$	$x^2 = y^2 + 4y + 4$
$-5x = -5y + 15$	$-5x = -5y - 10$ (*)
$+4 = +4$	$+4 = +4$
$x^2 - 5x + 4 = y^2 - 11y + 28$	$x^2 - 5x + 4 = y^2 - y - 2.$

(*) Denn da $x - 2 = y$ und $x = y + 2$ ſo iſt $\times 5$

$$5x = 5y + 10$$
und
$$-5x = -5y - 10$$

Und ſo auch auf der andern Seite

$$x = y - 3 \quad \times 5$$
$$5x = 5y - 15$$
und
$$-5x = -5y + 15$$

III. Multiplikation.

$$x^3 + bx^2 + cx + q = 0$$

Man ſoll in dieſer Gleichung die Wurzel x in a multipliziren, ſo iſt

Nr. I. $ax = y$ und

$$x = \frac{y}{a} \text{ folglich}$$

$$x^3 = \frac{y^3}{a^3}$$
$$bx^2 = \frac{by^2}{a^2}$$
$$cx = \frac{cy}{a}$$
$$q = q$$

IV. Diviſion.

$$x^3 + bx^2 - cx + r = 0$$

Man ſoll die Wurzel x durch a dividiren, ſo iſt

Nr. II. $\frac{x}{a} = y$ und

$$x = ay$$

$$x^3 = a^3 y^3$$
$$+ bx^2 = ba^2 y^2$$
$$- cx = - cay$$
$$+ r = + r$$

Nr. II. $x^3 + bx^2 - cx + r = a^3y^3 + ba^2y^2 - cay + r = 0$

$$: a^3$$

$$= y^3 + \frac{by^2}{a} - \frac{cy}{a^2} + \frac{r}{a^3} = 0$$

Eine Gleichung, in welcher $y = \frac{x}{a}$

Nr. I.

$$x^3 + bx^2 + cx + q = \frac{y^3}{a^3} + \frac{by^2}{a^2} + \frac{cy}{a} + q = 0$$

$$\cdot a^3$$

$$= y^3 + aby^2 + a^2cy + a^3q = 0.$$

Eine Gleichung, in welcher $y = ax$.

§. 345. **Zuſatz.** Eine gegebene Gleichung wird alſo multiplizirt, wenn man ſie durch eine geometriſche Progreſſion multiplizirt, deren erſtes Glied 1 und der Exponent die Zahl iſt, durch welche die Gleichung multiplizirt werden ſoll;

ſoll; und ſie wird dividirt, wenn man die gegebene Gleichung durch eine geometriſche Proportion dividirt, deren erſtes Glied 1 und der Exponent die Zahl iſt, wodurch ſie dividiret werden ſoll.

§. 346. Zuſatz. Weil die fehlende Glieder als Potenzen angeſehen werden, deren Koeffizienten = 0, ſo muß man ſie bey dieſer Rechnung nicht vergeſſen; z. E. man ſoll $x^3 + cx - q$ durch 2 multipliziren, ſo ſetzt man

$$\begin{array}{llll} x^3 & * & + cx & - q \\ 1, & 2, & 4, & 8 \\ \hline x^3 & * & + 4cx & - 8q \end{array}$$ das geſuchte Produkt.

Oder man ſolle $x^3 + px - r$ durch drey dividiren, ſo ſetzt man

$$\begin{array}{llll} x^3 & * & + px & - r \\ 1, & 3, & 9, & 27 \\ \hline x^3 & * & + \frac{px}{9} & - \frac{r}{27} \end{array}$$

§. 347. Zuſatz. Fehlet ein Glied, und man möchte es gern wieder herſtellen, ſo darf man nur die Wurzel mit eins vermehren; will man ein Glied hinwegſchaffen, ſo verſucht man es entweder durch die Subtraktion oder Addition, je nachdem das wegzuſchaffende Glied das Zeichen + oder — hat; Brüche bringt man durch die Multiplikation hinweg u. ſ. w. In der Rechnung des Unendlichen wird das Weitere vorkommen.

Die Beſtimmung der Koeffizienten bey Ausdrückungen durch unendliche Reihen.

§. 348. Lehrſatz. Wenn eine Gleichung, die durch eine unendliche Reihe ausgedrückt wird, lauter Potenzen von z hat, deren Exponenten ganze poſitive Zahlen ſind, und wenn man für z alle mögliche, auch unendlich kleine Gröſſen,

folglich auch Nulle ſeßen darf, ſo werden alle ihre Koeffizienten null. Denn es ſey $o = a + bz + cz^2 + dz^3 - - -$
Nun iſt nach der Hypoth. $z = o$
folglich $o = a + o + o + o - - -$
alſo $a = o$.

Es iſt aber auch $b = o$, denn $o = bz + cz^2 + cz^3 - - -$

$$\frac{\qquad\qquad}{} : z$$
$$o = b + cz + cz^2 - -$$
$$z = o.$$
$$o = b + o + o + o. \text{ alſo}$$
$$b = o.$$

Eben ſo beweiſt man, daß $c = o$; u. ſ. w. bis endlich alle Koeffizienten null werden.

§. 349. **Lehrſatz.** Es ſey gegeben $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 - -$ ſo kann man den Werth von y durch z ausdrücken, wenn man folgende Reihe annimmt, und hernach die Koeffizienten zu beſtimmen ſucht.

$y = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 - - -$ folglich

$ay = aAz + aBz^2 + aCz^3 + aDz^4 + aEz^5$
$by^2 = \quad bA^2z^2 + 2bABz^3 + \left(\begin{matrix} bB^2 \\ 2bAC \end{matrix}\right] z^4 + 2bBCz^5 - - = b(Az + Bz^2 + Cz^3)^2$
$cy^3 = \quad cA^3z^3 + 3cABz^4 + 3cB^2 \; Ac5 - - = c(Az + Bz^2 + Cz^3 -)^3$
u. ſ. w.
$- z = - z.$

Wenn man nun die ganze Reihe ordnet, nach §. 327. ſo hat man

$(aA - 1)z + (aB + bA^2)z^2 + (aC + 2bAB + cA^3)z^3$
u. ſ. w.

Wenn nun $z =$ Nulle geſeßt wird, ſo ſind alle Koeffizienten $= o$, folglich $aA - 1 = o$, $aB + bA^2 = o$, $aC + 2bAB + cA^3 = o$; man kann daher ihren Werth beſtimmen. Denn

wenn

wenn $aA - 1 = 0$, ſo iſt

Nr. I. $aA = 1$, und

$$\underline{\qquad\qquad} : a$$

$$A = \frac{1}{a}$$

Nr. II. $aB + bA^2 = 0$, folglich

$$aB = -bA^2$$

$$\underline{\qquad\qquad} . a$$

$$B = -\frac{bA^2}{a}, \text{ nun iſt } A = \frac{1}{a} \text{ nach Nr. I.}$$

$$\text{alſo } A^2 = \frac{1}{a^2}$$

folglich $B = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2} = -\frac{b}{a^3}$

$$aC + 2bAB + cA^3 = 0$$

$$aC = -2bAB - cA^3$$

$$C = -\frac{2bAB - cA^3}{a} = \frac{2b^2}{a^5} - \frac{c}{a^4}$$ wenn

man nach Nr. II. und Nr. I. den gefundenen Werth von A und B ſubſtituirt.

§. 350. Zuſatz. Dieſes Verfahren ſetzt voraus, daß man die Exponenten der geſuchten Progreßion ſchon wiſſe, weil ſonſt in den Koeffizienten Widerſprüche erfolgen würden. Die Exponenten von der unbekannten Größe heißt man hier die Formam Seriei, die Geſtalt der Reihe oder Progreßion.

§. 351. Anmerk. Wenn man z. E. die Quadratwurzel von $1+x$ durch eine unendliche Reihe ſuchen will, ſo ſetzt man, wie oben,

$\sqrt{1+x} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ — — folglich

$1+x = 1 + 2Ax + (A^2+2B)x^2 + (2AB+2C)x^3 + (B^2+2AC+2D)x^4$

$1+x = 1+x$ ſubtr.

$0 = 0 + (2A-1)x + (A^2+2B)x^2 + (2AB+2C)x^3$; — — —

daher

daher iſt $2A - 1 = 0$ $\quad A^2 + 2B = 0 \quad 2AB + 2C = 0$

$2A = 1 \quad A^2 = -2B \quad 2AB = -2C$

$A = \frac{1}{2} \quad A^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad 2AB = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} = -2B \quad -\frac{1}{8} = -2C$

$:-2 \quad :-2$

$\frac{1}{4} : -2 = -\frac{1}{8} = B. \quad -\frac{1}{8} : -2 = \frac{1}{16} = C$ u. ſ. f.

Wäre nun die Geſtalt der Reihe nicht richtig angenommen, z. E. wenn man die Reihe $1 + Ax + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}}$ — — nähme, ſo würde das Quadrat ſeyn $1 + 2Ax + 2Bx^{\frac{3}{2}} + A^2x^2 + (2AB + 2AC)x^{\frac{5}{2}}$. folglich, um die Gleichung auf Nulle zu bringen, $1 + x$ ſubtrahirt

giebt $0 = 0 + (2A - 1)x + 2Bx^{\frac{3}{2}} + A^2x^2$ — — —

alſo $2A - 1 = 0$ II. $2B = 0$ III. $A^2 = 0$

Nr. I. $2A = 1 \quad :2 \quad A = 0$ welches Nr. I. widerſpricht, wo $A = \frac{1}{2}$ gefunden wird, dahero A niemal 0 werden kann; folglich iſt in dieſem letztern Fall die Geſtalt der Reihe unrichtig angenommen worden; und man muß eine andere ſuchen.

$:2 \quad B = 0$

$A = \frac{1}{2}$

§. 352. **Anmerk.** Man hat verſchiedene Methoden je und je erfunden, die Geſtalt der Reihen ſicher zu beſtimmen, damit man nicht auf Geradewohl rechnen dörfe. Die erſte iſt die Newtoniſche, da man durch Hilfe eines Parallelogramms in deſſen Vertikalfächer die ſteigenden Potenzen von der einen, in die Horizontalfächer aber die ſteigenden Potenzen der andern unbekannten Größe ſchreibt.

z^3.	z^3y	z^3y^2	z^3y^3
z^2	z^2y	z^2y^2	z^2y^3
z	zy	zy^2	zy^3
1	y	y^2	y^3

Iſt nun z unendlich klein, ſo wird z^2, z^3 u. ſ. w. noch unendlichmal kleiner werden, oder verſchwinden; das iſt, die oberen Glieder werden in Anſehung der untern verſchwinden: weil die Potenz eines unendlich kleinen Bruchs unendlichmal kleiner als die Wurzel iſt; eben ſo wenn z unendlich groß iſt, ſo werden die unteren Glieder dagegen verſchwinden; weil die Potenz einer unendlich groſſen Größe unendlichmal gröſſer iſt als die Wurzel; diejenigen Glieder endlich werden gleichnamig ſeyn, die wie z^3 und zy^3 oder wie zy^3 und z^3 u. ſ. w. beſchaffen ſind. Wenn man nun eine Linie von z^3 nach zy^3 ziehet, ſo werden nur z^3 und zy^3 durch den Mittelpunkt des Fachs von der Linie geſchnitten, die übrigen Glieder z^2y und z^2y^2, werden auf beyden

Seiten

Seiten von der Linie entweder oben oder unten vorbeygegangen werden, und alſo entweder unendlich groß oder unendlich klein heiſſen, folglich wegbleiben können. Es ſeye z. E. die Aequation $a + bx^2 + cxy + dy^2 + ex^3 + fx^5, + gx^3y^2 + hxy^4 + ix^6y + kx^5y^3 + lx^4y^4 + mx^2y^5 + nx^4y^5$ gegeben, ſo wird ſie folgender Geſtalt geordnet:

	x^6y					
x^5			x^5y^3			
				x^4y^4	x^4y^5	
x^3		x^3y^2				
x^2						x^2y^6
	xy			xy^4		.
1		y^2				

wo man im Parallelogramm die Koeffizienten wegläßt, und nur die Potenzen in ihrer Ordnung ſetzt. Wenn nun x unendlich klein, und man verlangt den Werth von y, ſo betrachtet man die unteren Glieder, da dann entweder $a + dy^2 = o$; und daraus $y = \sqrt{-\frac{a}{d}}$ gefunden wird; oder man ziehet von y^2 die Linie nach y^6, ſo hat man $dy^2 + hxy^4 + mx^2y^6 = o$, woraus y geſuchet wird, damit man die Geſtalt der Reihe bekomme. Man ſehe hievon unſers berühmten Hrn. Prof. **Kies** Dilucid. Kæſtner. Anal. p. 35. 36. wo alles dieſes deutlich auseinander geſetzt und mit Exempeln belegt wird, unter welchen das gegenwärtige auch vorkömmt. Unter ſeiner Direktion gaben auch Herr M. **Holland** und Herr M. **Pfeiffer** im Jahr 1766, jener eine deutſche, dieſer eine lateiniſche Abhandlung vom Newtoniſchen Parallelogramm allhier in Tübingen heraus, worinnen die ganze Lehre deutlich und ausführlich vorgetragen wird.

§. 353. **Anmerk.** Herr Prof **Käſtner** hat die Sache unter den Deutſchen vorzüglich bekannt gemacht; theils in ſeinen Anfangsgründen Th. II. theils vorhero ſchon in zwo beſondern Diſſert. die er zu Leipzig 1743 und 1745. herausgab, unter dem Titel: Æquationum ſpecioſarum reſolutio Newtoniana per ſeries, und de reſolutione æquationum differentialium per ſeries; welcher zweyten er folgende Inſchrift vorgeſetzt hat:

Paucula jam ſeries monſtrat primordia naſcens.
Lege ſua partes hæc ſine fine regunt;
Sic a vita hominis quam bis ſex luſtra coercent,
Æva tenent formam non numeranda ſuam.

Ich

Ich würde mich auch durch den Namen eines Kompendii nicht haben zurückhalten laſſen, dieſe Lehre ausführlich und nicht nur in etlichen Anmerkungen vorzutragen, wenn es nicht allgemeinere und beſſere Methoden gäbe, alle mögliche Reihen, durch welche eine Gleichung ſich auflöſen läßt, zu finden, wie die Methode des Hrn. Nik. **Bernouilli** iſt, von welcher Herr Prof. **Käſtner** ſelbſt folgendes ſchreibt: „ Dieſe Methode iſt in der That allgemeiner als das Newtoniſche Parallelogramm; beſonders deswegen, weil ſie die Exponenten aus den Koeffizienten der Differentialen beſtimmt; daher ſie Reihen geben kann, wo das Parallelogramm keine gäbe; und ſelbſt wenn ſie Reihen giebt, deren Exponenten mit den Exponenten der Reihen des Parallelogramms in einer Progreßion ſind, doch dieſe Reihen vollſtändiger, nämlich mit mehr Gliedern giebt, als das Parallelogramm. „ Anal. Infin. p. 424. Die Bernouilliſche Regel aber läßt ſich hier noch nicht vortragen, weil ſie die Rechnung des Unendlichen vorausſetzt (*).

Von unbeſtimmten Aufgaben.

§. 354. **Anmerk.** Wir wollen mit dieſem Titel den Uebergang zur praktiſchen Arithmetik machen, wo ohnehin Aufgaben genug vorkommen; nur muß man wiſſen, was beſtimmte und unbeſtimmte Aufgaben ſeyn.

§. 355. **Erklär.** Eine unbeſtimmte Aufgabe heißt überhaupt eine Aufgabe, die mehr als eine Auflöſung hat; wie eine Frage, auf die man mehr als eine Antwort geben kann. Z. E. wenn man zwo Zahlen will, deren Summe $= 10$, das iſt $x + y = 10$; ſo iſt $x = 10 - y$, und ich kann für y ſetzen, was ich will, wenn es nur kleiner iſt als 10; man wird x überall finden; z. E. $x = 10 - 4$, oder

(*) Eine ſehr leichte Anweiſung zu dieſer ſchweren Kunſt hat Herr **P. Karl Scherffer** im erſten Bande ſeiner Inſtitut. Analyticarum. S. 255. ꝛc. gegeben, wobey er das bequemere algebraiſche Dreyeck anwendet, in welches Herr de Gua das Newtoniſche Parallelogramm verändert hat, und deſſen ſich ſchon mehrere Analytiker mit Vortheil bedienten.

oder $10 - 8$, oder $10 - 9$, oder $10 - \frac{1}{2}$ u. ſ. w. Denn $6 + 4 = 10$, $2 + 8 = 10$, $9 + 1 = 10$, $\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} = 10$ u. ſ. w.

§. 356. **Anmerk.** In einer jeden Scienz giebt es ſolche Aufgaben; z. E. in der Geometrie, wenn man auf die gegebene Grundlinie einen rechtwinklichten Triangel aufrichten; aus dem Inhalt und der Grundlinie ein Dreyeck machen ſoll; u. ſ. w.

§. 357. **Zuſatz.** Bey Auflöſung unbeſtimmter Aufgaben muß man nur für y ſolch einen Ausdruck ſuchen, daß die Gleichung einfach wird.

§. 358. **Anmerk.** Man ſolle z. E. ein Quadrat finden, das von einem andern Quadrat abgezogen, wieder ein Quadrat läßt; alſo $z^2 - x^2 = y^2$; folglich

$y = \sqrt{(z^2 - x^2)}$ Man ſetze dieſes gleich $z - px$, weil, wenn man wieder quadrirt, ſich z^2 auf beyden Seiten aufhebt.

Es ſey $y = z - px$

ſo iſt $\sqrt{z^2 - x^2} = z - px$ Dieſes quadrirt giebt

$$z^2 - x^2 = z^2 - 2pzx + p^2x^2$$
$$z^2 = z^2$$
$$\overline{-x^2 = -2pzx + p^2x^2} \quad : x$$
$$-x = -2pz + p^2x$$
$$2pz = p^2x + x$$

oder welches einerley, wenn man die Werthe hierüber ſetzt, nun iſt ferner

$$p^2x + x = (p^2+1)x$$
$$\overline{2pz = (p^2 + 1)x} \quad : p^2 + 1$$

$\frac{2pz}{p^2+1} = x$. Wenn man nun für p eine Rationalzahl ſetzet, ſo bekömmt hier x einen Rationalwerth, woraus man auch für y einen bekömmt; z. E. z ſey 10, $p = \frac{1}{2}$, ſo iſt $x = 8$, und $y = 6$. Denn $10^2 - 8^2 = 6^2$ oder $100 - 64 = 36$, welches lauter Quadrate ſind.

§. 359. Anmerk. Die Abſicht der unbeſtimmten Aufgaben iſt dieſe, daß die geſuchten Gröſſen hernach rational werden; daher dieſe Arbeit beſonders eine Uebung für die Alten war, welche die Irrationalgröſſen für keine rechten Zahlen hielten, ſelbige auch um ſo mehr, ſo viel ſie konnten, verhüteten, weil ſie die bequeme Art durch die ſogenannte Approximation dem Werth der Wurzel ſich zu nähern nicht hatten, wie wir ſie haben. Weil übrigens Diophantus davon, wie wir §. 123. gemeldet, eines und das andere geſchrieben, ſo nennt man die hieher gehörigen Kunſtgriffe auch die Analyſis Diophantea.

Drit-

Drittes Hauptſtück,

von der

praktiſchen Rechenkunſt.

§. 360.

Erklärung.

Unter der praktiſchen Rechenkunſt verſteht man nichts anders, als die Anwendungen der in beyden vorhergehenden Hauptſtücken vorgetragenen Lehren und Regeln auf die im menſchlichen Leben zu berechnen vorkommende Fälle.

§. 361. **Zuſatz.** Man muß daher von den **genannten** Zahlen, und von der Art und Weiſe, ſolche auf die vier Rechnungsarten zu bringen, ferner von der Vergleichung dieſer Zahlen nach dem Handel und geſellſchaftlichen Leben der Menſchen u. ſ. w. reden, auch zeigen, wie man, ſo viel möglich, eine Fertigkeit darinnen bekommen ſolle, damit man das, was man zu rechnen hat, ſchnell rechnen könne. Ehe wir nun dieſe Anwendung ſelbſt etwas ausführlicher beweiſen, wollen wir nach dem Plane der vorigen Hauptſtücke die Geſchichte der praktiſchen Rechenkunſt vorher noch kürzlich vortragen.

Geſchichte der praktiſchen Rechenkunſt.

§. 362. Die praktiſche Rechenkunſt iſt durch die im menſchlichen Handel und Wandel unumgängliche Nothwendigkeit, manches zu berechnen, eingeführet worden, wie die

praktiſche Geometrie den durch die öftere Ueberſchwemmungen des Nils abgenöthigten Ausmeſſungen der ägyptiſchen Felder, um die Rechte des Eigenthums zu behaupten, ihr Daſeyn zu danken hat. Beyde Wiſſenſchaften ſind alſo im Anfange, wie faſt alle anderen Wiſſenſchaften in ihrer Minderjährigkeit es waren, ſehr ungekünſtelt und nur in ſo weit brauchbar geweſen, als die Nothwendigkeit der Sache ihre Brauchbarkeit erforderte. Man darf ſich daher nicht wundern, daß die praktiſche Rechenkunſt zuerſt aufgekommen, indem wir vielleicht keine theoretiſche haben würden, wenn jene nicht erſt bey häufiger vorkommenden und ſchwerern Rechnungsfällen die Nothwendigkeit der Theorie deſto unentbehrlicher gemacht hätte; man wird ſich auch um ſo weniger darüber wundern, weil man nicht leicht eine Wiſſenſchaft in der Welt nennen kann, die ihr theoretiſches Daſeyn nicht auf eine ſolche Weiſe erhalten hätte.

§. 363. Aus der Geſchichte der vergangenen Zeiten hat man die gegründete Vermuthung, daß die erſten Handlungsgeſchäfte unter den Phöniziern im Schwung giengen. Man darf daher mit eben ſo gutem Grunde den Urſprung der praktiſchen Rechenkunſt aus Phönizien herleiten, mit welchem man den Urſprung der praktiſchen Geometrie, wie wir hören werden, aus Egypten herzuleiten pflegt.

§. 364. Im Anfange blieb dieſe Kunſt, wie man leicht vermuthen kann, in die engſten Schranken eingeſchloſſen; da aber die Theorie nach und nach hinzukam, ſo wurden die Schranken erweitert, und man konnte die praktiſchen Aufgaben ungleich mehr vervielfältigen.

§. 365. Von der Theorie haben wir das Nöthigſte in Rückſicht auf die Geſchichte bey den vorhergehenden Hauptſtücken vorgetragen. Wir nennen daher gegenwärtig nur diejenige Schriftſteller, welche blos die praktiſche Rechenkunſt, ohne Theorie, dergeſtalten erläutert haben, daß man ſie einem

gleich-

gleichſam mechaniſch beybringen kann. Hieher gehören nun **Gemma Friſius**, deſſen leichte Methode der praktiſchen Arithmetik zu Wittenberg 1544 herauskam; Herr von **Wolf** ſchreibt von dieſem Buche, er habe als ein Knab noch die ganze praktiſche Rechenkunſt, auch die Ausziehung der Wurzeln, ohne Beyhilfe eines Lehrmeiſters, allein aus dieſem Büchlein, (denn es beſteht nur aus eilf Bögen) gelernt; Elem. Math. Vniv. T. V. P. I. C. II §. 17. Ferner gehört hieher **Adrian Metius**, der zwey Bücher von der Rechenkunſt 1640 zu Koppenhagen herausgab; vorzüglich aber unter den Neuern K. F. de **Rees**, ein Holländer, deſſen Büchlein von der praktiſchen Rechenkunſt 1739 zu Göttingen in das Deutſche überſetzt wurde, und im Drucke erſchien. Er hat alle Aufgaben, die auf der Lehre der Proportionen beruhen, durch eine Regel, die von ihm die **Reesiſche** heißt, alſo aufgelöſt, daß man ohne alle Theorie blos mechaniſch die Sache einem Knaben beybringen kann. Hrn. L. **Wenz** haben wir ſchon genannt; unter den Neueſten iſt auch der verdienſtvolle Herr Rektor **Stritter** zu Idſtein im Naſſauiſchen zu nennen.

§. 366. Anmerk. Die Rechenmaſchinen könnte man auch noch hieher zählen. Dergleichen eine hat **Sam. Morland** 1671 zu London bekannt gemacht. Eine andere, die noch künſtlicher iſt, hat **Leibnitz** ſchon in ſeiner Jugend erfunden. Und noch eine andere, wiewohl nicht ſo brauchbare, hat **Joh. Polenus** mit vielem Witze ausgedacht. Der Nutzen von allen beſteht darinnen, daß man durch ihre Hilfe mechaniſch addiren und ſubtrahiren, und ohne das Einmal Eins multipliziren und dividiren kann. Inzwiſchen iſt es doch beſſer, wenn man die vier Rechnungsarten wohl lernet, weil es nicht ſein läßt, wenn man dasjenige, wozu einem Gott Verſtand und Witz verliehen hat, ſich gar zu bequem machen will. Eben dieſes müſſen wir von einigen andern Bemühungen ſagen, welche man ſonſten in der praktiſchen Arithmetik zu rühmen pflegt. Es ſind die **Neperiſche Stäblein**, welche übrigens auf eine ungemein witzige Art ausgedacht ſind; indem man durch ihre Beyhilfe, wenn man nur addiren und ſubtrahiren kann, die größten Zahlen ſchnell multipliziren und dividiren lernt. Allein

man muß beſonders bey groſſen Zahlen ein halb Hundert ſolche Stäblein, oder wenigſtens etliche Dutzend, immer bey ſich tragen, um im Fall einer vorkommenden Rechnung ſogleich das Verlangte finden zu können. Mich dünkt, es ſey beſſer, die arithmetiſchen Regeln und das Einmal Eins im Kopf, als ſolche Menge Holz in der Taſche zu haben, wenn man auch in der Ausübung fertig werden will; zur Theorie braucht man ſie ſo nicht. **Joh. Neper**, ein ſchottländiſcher Baron, der ſich um die logarithmiſche Rechnung, davon wir in der Geſchichte der Trigonometrie reden werden, ungleich höher verdient gemacht, hat dieſe Stäblein zu Anfang des vorigen Jahrhunderts erfunden und bekannt gemacht (*); **Sam. Reyher**, Prof. der Math. zu Kiel, ahmte ihm nach, und verfertigte ähnliche Sexagenalſtäblein, die er 1688 bekannt machte, und durch welche die logiſtiſche Rechnung erleichtert wird. Die Zeichnungen und Figuren davon laſſen ſich nicht verſtändlich genug geben. Man muß ſie körperlich ſehen, um einen ganzen Begriff davon zu bekommen. Es iſt aber, wie wir ſchon gemeldet, kein ſonderlicher Schade, wenn man ſie nie geſehen, und hingegen ein Vortheil für den Verſtand, wenn man ſich nicht daran gewöhnet hat.

§. 367. **Anmerk.** Einen Vortheil, deſſen man ſich aus Noth bedienen muß, und welchen wir ungleich höher halten als die bisherigen, können wir nicht ganz übergehen. Wenn einem einer der äuſſerlichen Sinnen, und beſonders der Hauptſinn, nämlich das Geſicht, fehlet, ſo iſt es keine Bequemlichkeit, wofern er ſolche oder ähnliche Hilfsmittel ſuchet. Das war der Fall, in welchem der blind geweſene Prof. der Mathem. zu **Cambridge**, Namens **Saunderſon**, ſich befand. Er ſah ſich durch ſeine äuſſerliche Blindheit genöthigt, auf ein Mittel zu ſinnen, ohne Augen ſo ſchnell und ſo gut rechnen und kalkuliren zu können, als mit ſehenden Augen. Er ſetzte alſo in die Stelle des Geſichts das Gefühl, und verſuchte es, ob er nicht mit dem Gefühle Obiges bewerkſtelligen könnte, was ihm die Abweſenheit des Geſichts verſagte. Sein Verſuch iſt ihm auch nicht mißlungen. Er beſteht im folgenden. Statt der neun Zahlzeichen wählte er neun Quadrate oder Vierecke, deren jedes in vier kleinere eingetheilt war, durch

(*) Beſchreibungen dieſer Rechenſtäbe findet man hie und da voraus in den ältern Rechenbüchern; unter den neuern gab Herr Abbé von Metzburg in ſeinen ſchon angeführten Elem. Arithm. § 37.38. eine, die eben ſo kurz als deutlich iſt.

durch welche Eintheilung er neun Durchſchnitte des gröſſern Quadrats bekam; in welche Durchſchnitte er die 9 einfache Zahlzeichen alſo ſetzte, daß er in die Mitte des groſſen Quadrats eins, gerad oben 2, zur Linken der 2 weiter 3, herabwärts 4 u. ſ. w. ſetzte, bis alle neun Zahlen in die Durchſchnitte des Quadrats kamen, wie Fig. 2. zeiget. Um nun damit rechnen zu können, ließ er ſich für die neun Zahlzeichen neun ſolche Quadrate machen, davon jedes nur in der ihm angewieſenen Stelle das für dieſe Stelle gehörige Zahlzeichen enthielte; das zehnte Quadrat war eine Nulle, wo in der Mitte die Nulle befindlich ſeyn mußte, wovon wir den Grund ſogleich einſehen werden. Weil er aber durch das Gefühl rechnete, ſo ließ er in die 9 Durchſchnitte des Quadrats kleine Oeffnungen bohren, daß eine Stecknadel darinnen Platz hatte, die mittelſte Oeffnung für die Nulle, wenn kein Eins da war, ließ er etwas gröſſer bohren, und ſteckte jedesmal die gröſte Stecknadel darein. Wir haben die Sache Fig. 3. ausgedrückt. Wollte er nun eine Zahl durchs Gefühl leſen, oder mit mehrern rechnen, ſo ſetzte er ſeine Quadrate, wie Fig. 4. und kam damit durch die Uebung ſo ſchnell zurechte, als wir mit ſehenden Augen immer zurechte kommen können. In der angeführten Figur ſtehen die Zahlen 94084 und 84358 nebſt deren Summe 178442, welche man nach den Quadraten ſetzen und beſtimmen kann. Denn weil man nach dem Gefühl aus der gröſten Stecknadel oder Oeffnung in der Mitte auf den Platz eines jeden Zahlzeichens ſchlieſſet, ſo darf man die kleinere Stecknadel jedesmal nur in ihre durchs Gefühl zu findende Stelle ſtecken, und hernach die gefundene Zahl aus dem Gefühl ausſprechen. Es iſt ohne unſern Erinnern klar, daß man auf dieſe Weiſe alle Rechnungsarten anbringen kann; Herr Saunderſon hat ſeine Manier auch mit vielem Nutzen in der Geometrie gebraucht, und faſt alles, was ein ſehender Mathematikus leiſten kann, damit geleiſtet; die Methode iſt aber nur für natürlich Blinde, die Sehende werden ſich keiner ſolchen Hilfsmittel bedienen, unerachtet ſie in der praktiſchen palpablen Arithmetik vor allen andern einen Vorzug verdient, weil ſie nicht zur bloſſen Bequemlichkeit, ſondern aus Noth erfunden worden iſt. Uebrigens melden wir noch, daß Herr Saunderſon, aus der Provinz York gebürtig, im erſten Jahr ſeines Alters durch die Kindsblattern völlig um ſein Geſicht gekommen iſt. Dem ungeachtet hat ſein fähiges Naturell und ſein anhaltender Fleiß zu jedermanns Verwunderung es ſo weit gebracht, daß man ihm die Stelle eines Prof. der Mathematik zu Cambridge anvertraute, welche er auch mit groſſem Ruhm bekleidete, wie unter andern die in en-

 gliſcher

gliſcher Sprache von ihm aufgeſetzten Elemente der Algebra, die 1741. in zween Quartbänden etliche Jahre nach ſeinem Tode herauskamen, einen hinlänglichen Beweis davon geben.

Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

§. 368. **Erklär. Genannte Zahlen** ſind ſolche Zahlen, denen am Ende der Name ihrer Einheit beygefüget wird. Z. E. 5 fl. 6 Thl. 3 ggr. 7 kr. u. ſ. w.

§ 369. **Zuſatz.** Weil man nur Zahlen von einer Art oder von einerley Einheit zuſammen zählen kann §. 15., ſo iſt klar, daß man bey Anwendung der vier Rechnungsarten auf die genannten Zahlen, ſolche Zahlen unter einerley Benennung bringen muß.

Exempel. Die Sache läßt ſich am beſten durch Exempel erläutern. *

Addition.

5	fl.	30	kr.	5	hl.
2	fl.	50	kr.	3	hl.
		40	kr.	1	hl.
9	fl.	1	kr.	3	hl.

Man ſoll das vorgegebene Exempel addiren; ſo ſagt man, 5 und 3 und 1 hl. geben 9 Heller; weil nun 6 hl. einen kr. machen, ſo ſetzt man nur 3 hl., und behält die 6 als eine Einheit der kr. in die nächſtfolgende Stelle der kr.; wo es heißt: 30 und 50 geben 80, und 40 dazu, geben 120, und einen kr. behalten, geben 121 kr. das iſt, weil 60 kr. einen Gulden machen, folglich 120 = 2, 60 = 2 fl. zuſammen 2 fl. 1kr. Man ſetzt alſo 1kr. in die Stelle der kr., und behält 2 fl. = 120 kr. für die Stellen der Gulden; wo es abermal heißt 5 und 2 geben 7 fl. und 2 behalten geben 9 fl.

Subtraktion.

3.	fl.	2.	kr.	3	hl.
2	fl.	20	kr.	5	hl.
		41	kr.	4	hl.

Bey der Subtraktion heißt es: 5 hl. von 3 hl. laſſen ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der kr. einen Kreuzer, das iſt 6 Heller; dieſe zu 3 addirt geben 9 Heller; von neun Heller laſſen ſich 5 abziehen, der Reſt iſt 4 hl. Ferner 20 kr. von 1 kr. (weil einer für die Heller entlehnt wurde) laſſen ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der Gulden 1, daß eine Einheit 60 kr. macht; 20 kr. von 61 kr.

laſſen

laſſen 41 kr. endlich 2 fl. von 2 fl. (weil einer für die Stelle der Kreuzer entlehnt wurde) laſſen nichts. Alſo iſt der Reſt 41 kr. 3 hl.

Multiplikation.

2 fl. 23 kr.
3
6 fl. 69 kr.
7 fl. 9 kr.

Wenn man 2 fl. 23 kr. dreymal nehmen ſoll, ſo hat man 3 . 23 = 69 = 60 + 9 = 1 fl. + 9 kr.; und 3 . 2 = 6 fl. 69 kr. iſt züſammen addirt 7 fl. + 9 kr.; wo man in dem gegenwärtigen Falle die Gulden nicht zu kr. machen darf; hingegen

Diviſion.

3 fl. 20 kr. oder in kr.
60
180 + 20 kr. das iſt
200 kr. | 50 kr.
44

bey der Diviſion, wenn 3 fl. 20 kr. unter 4 getheilt werden ſollen, muß man zuerſt alles zu kr. machen, welches durch die Multiplikation der Gulden mit 60 geſchieht, zum Produkt werden die 20 kr. addirt, die Summe 200 wird in 4 dividirt; der Quotient 50 kr. zeigt an, wie viel einer von den Vieren bekomme; ſollte der Quotient über ſechzig ſich belaufen, ſo muß man mit 60 dividiren, der Quotient wird hernach die Gulden beſtimmen; und was übrig bleibt, ſind kr.

§. 370. Zuſatz. Es iſt klar, daß man bey dieſer Rechnung wiſſen muß, wie viel Heller ein kr., wie viel kr. ein fl. u. ſ. w. oder im Frucht = und Weinmaaß, wie viel Simri ein Scheffel, wie viel Maaß ein Eimer, wie viel Eimer ein Fuder u. ſ. w. halte, welches man hier um ſo eher vorausſetzen darf, als das wirkliche Maaß in einem jeden Land verſchieden iſt, wie man denn z. E. Geld in Sachſen mit pf. ggr. und Thl., bey uns mit hl. kr. und fl. rechnet, u. ſ. w. daher man kein gewiſſes Maaß feſtſetzen kann.

§. 371. Zuſatz. Wenn einem die Rechnung bey der Subtraktion wegen dem Entlehnen beſchwerlich iſt, ſo darf man nur nach der Buchſtabenrechnung ſubtrahiren, in welchem Falle man nicht irren kann, wenn man auch ſchon nicht weis,

wie viel hl. einen kr., wie viel kr. einen fl. machen u. ſ. w. Das obige Exempel würde alſo folgender Geſtalt ausſehen:

	3 fl. + 2 kr. + 3 hl.		
	2 fl. + 20 kr. + 5 hl.		
	— — —		
	1 fl. — 18 kr. — 2 hl.	Wo die Querſtriche	
das iſt	+ 41 kr. + 4 hl.	minus bedeuten.	

§. 372. Anmerk. Wenn in einer ſtarken Rechnung viele Brüche vorkommen, die man zu ſummiren hat, ſo iſt es gut, wenn man ſchnell den kleinſten Nenner finden kann, weil man ſonſt viele Zeit und Papier brauchte, woferne man nach den gewöhnlichen Regeln Fuß für Fuß rechnen müßte. Es wird aber der kleinſte Nenner gefunden, wenn man alle Nenner zuſammen auf eine Seite ſetzt, was ſich aufheben läßt, aufhebt, doch ſo, daß man das, womit man aufhebt, beyſetzt, und die übrige Zahlen hernach multiplizirt. Z. E. Bey Gulden

fl. 360 kleinſter Nenner.

Nenner 5 · 9 · 8 · 4 · 2 : mit 4

5 · 9 · 2 · 1 · 2 : 2

5 · 9 · 1 · 1 · 1.

$5 \times 9 \times 2 \times 4 = 360$ kleinſter Nenner, der auch die goldne Zahl genennt wird.

$\frac{2}{5}$ — —	72 — —	144
$\frac{2}{9}$ — —	40 — —	80
$\frac{1}{8}$ — —	45 — —	45
$\frac{3}{4}$ — —	90 — —	270
$\frac{1}{2}$ — —	180 — —	180
		$\frac{719}{360} = 1\frac{359}{360}$.

Wenn man nun dieſen kleinſten Nenner mit jedem Nenner dividirt, und hernach mit dem Zähler wieder multiplizirt, ſo bekömmt man alle kleinſten Zähler; z. E. 5 in 360 iſt enthalten 72 mal; dieß 2mal genommen, giebt den Zähler 144; 9 in 360 iſt enthalten 40mal; dieß 2mal genommen giebt den Zähler 80; 8 in 360 iſt enthalten 45 mal; dieß einmal genommen giebt den Zähler 45; 4 in 360 iſt enthalten 90mal; dieß dreymal genommen iſt 270; 2 in 360 iſt enthalten 180 mal, dieß einmal genommen iſt 180; die einzelnen Zähler zuſammmen addirt geben $\frac{719}{360} = 1\frac{359}{360}$ fl.

§. 373.

§. 373. **Anmerk.** Wenn man einen Bruch ſchnell in genannten Zahlen, z. E. den Bruch von Gulden in Kreuzer, u. ſ. w. ausdrücken will, ſo hat man nur dieſe einzige Regel zu befolgen: **Man multiplizire den Zähler des Bruchs in die Anzahl der Einheiten, die auf die gegebene Gröſſe gehen, und dividire das Produkt durch den Nenner:** z. E. bey Gulden wird der Zähler mit 60 multiplizirt, was nach geſchehener Diviſion im Quotienten herauskömmt, ſind Kreuzer, und was übrig bleibt, ſind Brüche von Kreuzern; da alſo nach dem vorigen

Exempel $\frac{359}{360}$ fl. $= \frac{359 \cdot 60}{360}$ kr. $=$

3(3		
2154(	0	59 kr. $\frac{30}{36}$ kr.
366	0	
3		

Will man dieſe $\frac{30}{36}$ kr. zu Heller machen, ſo multiplizirt man den Zähler mit 6, weil 6 Heller einen kr. geben; $\frac{30}{36}$ kr. $= \frac{30 \cdot 6}{36}$ hl.

$$= \frac{180}{36} = 5 \text{ hl.}$$

So ſind $\frac{5}{6}$ fl. $= \frac{5 \cdot 60}{6} = 50$ kr.; $\frac{11}{12}$ fl. $= \frac{11 \cdot 60}{12} = \frac{660}{12} = 55$ kr. u. ſ. w. Der Grund davon iſt die Lehre der gegebenen Proportion. Der gegebene Nenner verhält ſich zu ſeinem Zähler, wie der neue Nenner (hier der Gulden auf Kreuzer reduzirt 60) zum neuen Zähler.

§. 374. **Anmerk.** Bey weitläuftigen Rechnungen, wo viele Brüche vorkommen, iſt es auch gut, wenn man die Brüche durch Dezimalfraktionen gleichförmig zu machen ſucht; wovon §. 80. folg. Denn kürzer und leichter kann die Lehre von Dezimalbrüchen nicht vorgetragen werden, als im angeführten §. geſchehen.

Von der Regel Detri, ſowohl directa als inverſa, der zuſammengeſetzten Regel Detri oder Regel Quinque, Geſellſchaftsrechnung, Kettenregel u. ſ. w.

§. 375. **Erklär.** Die Regel Detri, oder Regula trium, iſt die Regel, aus drey gegebenen Stücken ein viertes, das unbekannt iſt, kraft der geometriſchen Proportionen zu finden.

§. 376. **Zuſatz.** Die gegebene Stücke müſſen alſo unter ſich und mit dem Geſuchten in einer wahren geometriſchen Verhältniß ſtehen; denn ſonſt läßt ſich die Regel nicht anbringen.

§. 377. **Anmerk.** Wenn man z. E. ſagt, in Zeit von einer Stunde laufen aus dem Boden eines Faſſes zween Eimer aus; und glaubt, in drey Stunden werden ſechs auslaufen, ſo irrt man ſich; denn die gegebene Dinge ſtehen in keiner völlig geometriſchen Proportion, wie man aus hydroſtatiſchen Gründen weis; in der erſten Stunde lauft mehr aus als in der zweyten, weil der Druck ungleich iſt. Die Erfahrung lehrt eben dieſes. Ein volles Faß lauft ſtärker als ein um die Hälfte leeres. Man muß alſo die Sachen, die eine geometriſche Verhältniß haben, wiſſen; z. E. Waaren und Preis; Arbeit und Lohn; Einlag und Gewinn bey geſellſchaftlichen Rechnungen u. ſ. w. ſtehen in geometriſcher Verhältniß.

§. 378. **Erklär.** Die Regula trium directa heißt, wenn die gleichnamigten Glieder ſich auf einander in ihren gehörigen Stellen beziehen, nämlich das erſte auf das dritte, das zweyte auf das vierte; z. E. 100 fl. geben 5 Prozent, was geben 250 fl. Hingegen iſt ſie inverſa, wenn die Glieder ſich nicht in dieſer Ordnung auf einander beziehen, ſondern verſetzt werden müſſen, wenn das Geſuchte richtig gefunden werden ſolle; z. E. 100 Soldaten machen eine Schanze in 6 Tagen, wie viel braucht man Soldaten, wenn ſie in 2 Tagen fertig werden ſollen? Man ſieht leicht, daß es dreymal ſo viel ſeyn müſſen; ich darf alſo nicht ſetzen 6. T : 100 S = 2 T zu x S. denn da kämen dreymal weniger heraus; ſondern ich muß ſetzen 2 Tag : 6 T. = 100 : x, in welchem Fälle $x = \frac{600}{2} = 300$ Soldaten.

§. 379. **Anmerk.** Anfängern fällt es ſchwer, die Sache jedesmal genau zu unterſcheiden, wir wollen daher die Reesiſche Rechnung hiebey anzubringen ſuchen, und ſolche Regeln geben, dabey auch der ſchwächſte Anfänger nicht irren kann; nur müſſen

wir

wir vorher noch einige Erklärungen vorausſetzen, damit wir die Reeſiſche Rechnung hernach auf alle Fälle anwenden können (*).

§. 380. **Erklär.** Die zuſammengeſetzte Regel Detri, oder Regula trium compoſita, die auch Regula quinque heißt, lehret ſolche Aufgaben auflöſen, bey welchen man die Regel Detri mehr als einmal anbringt; ſie beruhet auf den Gründen, die wir §. 281. folg. vorgetragen haben. Z. E. 100. fl geben in 3 Jahren 15 Prozent, was geben 1000 innerhalb 10 Jahren? Wo man erſtlich ſetzt: 100 fl. geben 15 Prozent, was geben 1000? (beyderſeits in 3 Jahren) was herauskömmt, nenne man a Prozent; dann fährt man zweytens fort, 3 Jahr geben a Prozent, was geben 10 Jahr? (beyderſeits von tauſend fl. Kapital). Aber auch dieſe Rechnung wird durch die Reeſiſche Regel erleichtert. Die Kettenregel iſt die vorige, nur aber ſo, daß man die Regel Detri nicht nur 2, ſondern 3, 4, 5 und noch mehrmalen dabey anbringt. Z. E. Wenn das Fuder Wein 100 fl. koſtet, was koſtet die Maaß? Oder bey Wechſelrechnungen, wenn 4 Dukaten 11 Thaler, 2 Thaler 3 fl., 20 gr. einen fl. machen; wie viel Groſchen geben einen Dukaten? Die Auflöſung gründet ſich auf §. 283. Sie läßt ſich aber auch durch die Reeſiſche Rechnung mechaniſch lernen. Die Geſellſchaftsrechnung iſt, wenn mehrere zuſammen legen, und hernach Gewinn und Verluſt mit einander nach Proportion

(*) Gut und richtig ſagen die Verfaſſer des allgemeinen Bücherverzeichniſſes auf das Jahr 1778. VI. Stück Junius S. 443. Bey Gelegenheit der vollſtändigen Anweiſung zur Reeſiſchen Rechnung von Schmalzried. „Eigentlich iſt die Reeſiſche Regel wider die gute Lehrart „in der Rechenkunſt, da der Aufſatz unordentlich iſt, „und erkünſtelt werden muß.„ Wer einmal die Lehre von den Proportionen gefaßt hat, kann bey jenen Regeln nicht irren, die Herr Abbé von Metzburg in ſeinen Elem. Alg. Cap. VIII. ſowohl für die einfache als zuſammengeſetzte Regeldetri giebt.

portion des Eingelegten theilen. Mit dieſer Rechnung iſt die Vermiſchungsrechnung (Regula Alligationis) einerley, wenn man aus dem gegebenen Verhältniß der einfachen Materien finden ſoll, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen Menge der Vermiſchten komme.

§. 381. **Anmerk.** Dieſes vorausgeſetzt, läßt ſich nun die Reesſche Regel leicht anwenden. Sie iſt die folgende: wenn man eine Vertikallinie ziehet, und ſie unten durch eine Horizontallinie abſchneidet, hernach die gegebene Glieder auf beyden Seiten der Vertikallinie ſo ſetzt, daß beyderſeits einerley Namen zu ſtehen kommen, welches ſich am beſten bewerkſtelligen läßt, wenn man mit dem unbekannten Gliede anfängt; ſo ſind die Produkte der Glieder auf beyden Seiten gleich: und das unbekannte wird gefunden, wenn mann durch ſeinen Koeffizienten das Produkt auf der andern Seite dividirt. Dieſe Regel wird vielleicht mehr oder eben ſo viel Deutlichkeit haben, wenn wir ſie folgendermaſſen vortragen: **Alle Theile einer Gröſſe, wodurch die Gröſſe beſtimmt oder determinirt wird, ſetzet man auf einer Seite der durch ſie beſtimmten Gröſſe wechſelsweiſe gegen über;** z. E. 600 fl. geben in ſechs Jahren 50 fl. Prozent, was geben 1600 in 4 Jahren? Die ſechshundert Gulden Kapital und die Zeit der ſechs Jahre, ſo lang ich ſie ausleihe, beſtimmen die Gröſſe des Zinſes, à 50 fl. folglich werden 600 fl. und

$$\begin{array}{l|l} 600\text{ fl.} & 50\text{ fl. Zins} \\ 6\text{ Jahr.} & 1600\text{ fl.} \\ x\text{ Zins} & 4\text{ Jahr.} \\ \hline \end{array}$$

$$600 \,.\, 6 \,.\, x = 50 \,.\, 1600 \,.\, 4 \text{ und}$$

$$x = \frac{50 \,.\, 1600 \,.\, 4}{600 \,.\, 6} = 88\tfrac{8}{9}\text{ fl.}$$

6 Jahr als determinirende Gröſſen auf eine, 50 fl. Zins aber, als die dadurch determinirte Gröſſe auf die andere Seite geſetzt; eben ſo 1600 fl. Kapital und 4 Jahr Zeit des Ausleihens beſtimmen x fl. Zins; alſo werden abermal 1600 fl. und 4 Jahr Zeit als determinirende Gröſſen auf die eine, und die determinirten Gröſſen x Zins auf die andere Seite geſetzt. Dieß iſt ein Exempel von der Regel von fünf, oder Regula quinque. Bey der Regula trium inverſa pflegt man es eben ſo zu machen. Z. E. 200 Soldaten machen in 24 Tagen eine Schanze, wie viel Soldaten braucht man, wenn die Schanze in 6 Tagen

fer-

fertig werden ſolle? Man ſetzet nach der Regel; die Zahl der Arbeiter und die Länge der Zeit beſtimmen das Werk, folglich werden 200 Soldaten und 24 Tag, ſo lang ſie arbeiten, auf eine Seite als determinirende Umſtände, die Schanze als das determinirte Werk, auf die andere Seite geſetzt; eben

200 Sold.	1 Sch.
24 Tag.	x Sold.
1 Schanz	6 Tag.

$$200 . 24 = 6 . x$$

$$\text{und } x = \frac{200 . 24}{6} = 800.$$

ſo die Anzahl der verlangten Soldaten, die in 6 Tagen fertig werden ſollen, beſtimmen das Werk wieder; man ſetzet alſo x Soldaten und 6 Tage auf die andere Seite, und die Schanze herüber, damit nicht auf einer Seite einerley ſtehe. Oder ein anders Exempel: Wenn acht Ellen $\frac{9}{4}$ breites Tuch ein Kleid geben, wie viel braucht man Zeug, der nur drey Viertel breit iſt? Wo man beyderſeits den Nenner 4 im Bruch weglaſſen darf, weil die Benennung einerley iſt. Wir wollen noch ein Exempel geben, wo die Zeit mit in die Rechnung kömmt. 100 Perſonen verzehren in 3 Wochen 21 Zentner Fleiſch, wie viel Perſonen verzehren in 5 Wochen 63 Zentner?

8 Ell.	1 Kl.
$\frac{9}{4}$ breit	x Ell.
1 Kl.	$\frac{3}{4}$ breit.

$$8 . 9 = x . 3 \text{ und}$$

$$\frac{8 . 9}{3} = x = 24 \text{ Ell.}$$

100 Perſ.	21 Zentn.
3 Woch.	x Perſ.
63 Zentner	5 Woch.

$$100 . 3 . 63 = 21 . 5 . x$$

$$\frac{100 . 3 . 63}{21 . 5} = x \text{ das iſt, wenn man beyderſeits richtig aufhebt,}$$

$$20 . 3 . 3 = x = 180$$

180 Perſonen.

Bey der Kettenregel befolgt man eben die Methode. Oder man kann auch die andere gebrauchen, mit dem unbekannten Gliede anfangen, und hernach ſo fortfahren, daß immer das nächſtvorhergehende Glied wieder auf die entgegengeſetzte Seite zu ſtehen kömmt; z. E. das Fuder Wein (bey uns ſechs Eimer) koſtet 96 fl.

was

was koſtet die Maaß (der 160ſte Theil vom Eimer)? x kr. koſtet

x kr.	1 Ms.
160 Ms.	1 Eim.
6 Eim.	96 fl.
1 fl.	60 kr.

$$x \cdot 160 \cdot 6 = 96 \cdot 60$$

$$x = \frac{96 \cdot 60}{160 \cdot 6} = 6 \text{ kr.}$$

die Maaß, nun fährt man auf der andern Seite mit der Maaß fort, und 160 Maaß geben den Eimer, man fährt wieder mit dem Namen der Eimer fort; 6 Eimer koſten 96 fl; nun fährt man mit Gulden fort, ein fl. macht 60 kr.; da man dann mit dem Namen aufhört, mit welchem man angefangen hat. Eben ſo kann auch die obige Regel berechnet werden: Wie viel Ellen Zeug oder x Ellen geben ein Kleid; ein Kleid braucht ſonſt 8 Ellen Tuch; eine Elle Tuch iſt 9 Viertel breit, und 3 Viertel breit iſt die Elle Zeug; man hört wieder auf, wie man angefangen hat, und das letzte Glied der vorhergehenden Stelle iſt allemal das erſte der folgenden. Der Grund von dem allem iſt §. 283. angezeigt worden.

x Ellen Z.	1 Kleid
1 Kleid	8 Ell. T.
1 Ell. T.	9 Vrtl. br.
3 Vrtl. br.	1 Ell. Z.

$$3 \cdot x = 8 \cdot 9$$

$$x = \frac{8 \cdot 9}{3} = 24.$$

§. 382. Anmerk. Wenn Brüche vorkommen, ſo werden die Nenner ausgeſtrichen und wechſelsweiſe auf die entgegengeſetzte Seite als ganze Zahlen gebracht. Z. E. $\frac{3}{4}$ ℔. koſten $\frac{7}{9}$ fl. was koſten $\frac{6}{13}$ ℔.? Der Grund beruhet auf der Natur der Proportion.

	$\frac{3}{4}$ ℔.	$\frac{7}{9}$ fl.
9		4
13	x fl.	$\frac{6}{13}$ ℔.

$$3 \cdot 9 \cdot 13 \cdot x = 7 \cdot 4 \cdot 6$$

$$x = \frac{7 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 9 \cdot 13} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 2}{9 \cdot 13} = \frac{56}{117}$$

Denn wenn man wie §. 116. ſetzt: $\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = \frac{6}{13} : x$ ſo iſt $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{13}$ und $x = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{13} : \frac{3}{4}$ wie in Exempel.

§. 383. Anmerk. Man kann auch die Zahlen, die auf beyden Seiten gleich ſind, oder durch eine dritte Zahl ſich dividiren laſſen, kleiner ausdrücken, ein Verfahren, das man die welſche Praktik nennt, welche ſich auf die bekannte Regel bey den Brüchen gründet, die man aufheben, das iſt, kleiner oder mit

kleinern

kleinern Zahlen ausdrücken darf, wenn man den Nenner und Zähler mit einer dritten Zahl dividirt. Nun giebt das Produkt der einen Kolumne jedesmal den Zähler, und das Produkt der andern den Nenner, folglich wenn man auf beyden Seiten mit einer dritten Zahl dividirt, ſo weit man kann, ſo thut man weiter nichts, als was man in der Lehre von den Brüchen längſtens zu thun gewohnt war. Z. E.

500 fl. Kap.	200 Zins
10 Jahr	x Kap.
1000 fl. Zins	5 Jahr

$500 \,.\, 10 \,.\, 1000 = 200 \,.\, 5 \,.\, x$ — : 5

$100 \,.\, 10 \,.\, 1000 = 200 \,.\, x$ — : 100

$10 \,.\, 1000 = 2 \,.\, x$ — : 2

$5 \,.\, 1000 = x$

Wenn 500 fl. Kap. in 10 Jahren 200 fl. Zins geben, wie groß muß das Kap. ſeyn, daß man in 5 Jahren 1000 fl. Zins bekomme? Man dividire beyderſeits mit 5, ſo hat man: dieſe Gleichung dividire man wieder mit 100, ſo hat man: die letzte Gleichung dividire man nochmalen mit 2, ſo bekömmt man $x = 5000$; ſo groß muß das Kapital ſeyn.

§. 384. Anmerk. Bey der Geſellſchaftsrechnung iſt es am beſten, wenn man die Regel Detri ſo oft anwendet, als Fälle vorhanden ſind. Z. E. Drey Kaufleute haben zuſammen gelegt:

A 1000 Thl.
B 700
C 900

2600 Thl. Damit gewonnen 1500 Thl.

was gewinnt ein jeder? Man ſetzt alſo dreymal

$$2600 : 1500 = 1000 : x$$

oder weil die erſte Verhältniß mit 100 dividirt werden kann,

$$26 : 15 = 1000 : \frac{15 \,.\, 1000}{26} = \frac{15 \,.\, 500}{13} = 576\tfrac{12}{13}$$

$$- \quad - \quad 700 : \frac{15 \,.\, 700}{26} = \frac{15 \,.\, 350}{13} = 403\tfrac{11}{13}$$

$$- \quad - \quad 900 : \frac{15 \,.\, 900}{26} = \frac{15 \,.\, 450}{13} = 519\tfrac{3}{13}$$

Eben ſo wird die Vermiſchungsrechnung behandelt (Regula Alligationis). Z. E. Bey gutem Schießpulver gehören auf ein Pfund

oder

oder 32 Loth Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel; oder wenn man es halbirt, für ein halb Pf. das iſt 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel; wie viel braucht man Salpeter, Schwefel und Kohlen zu 1000 Pf. Pulver? Antwort, nach obiger Rechnung $761\frac{19}{21}$ Pf. Salpeter, $142\frac{6}{7}$ Pf. Kohlen, und $95\frac{5}{21}$ P. Schwefel.

§. 385. Anmerk. Zu Abkürzung der Rechnungen pflegt man auch je und je die kleinern genannten Zahlen in Diviſoren der Gröſſern zu verwandeln, und ohne die Reduktion hernach zu multipliziren; z. E. eine Elle koſtet 14 fl. 26. kr. 3 hl. was koſten 5428 Ellen? Man ſetzet das Exempel folgender Geſtalt, und multiplizirt zuerſt die obere Zahl durch 14; hernach, ohne noch die Partialprodukte zu addiren, zerfällt man 26 in diejenige ſummirende Zahlen, durch die ſich 60 kr. oder 1 fl. bequem dividiren läßt, ſie ſind 20 + 6, denn es iſt 20 = $\frac{1}{3}$ fl. = $\frac{60}{3}$, und 6 = $\frac{1}{10}$ fl. = $\frac{60}{10}$; daher dividirt man im Sinn die Zahl 5428 zuerſt mit 3, hernach mit 10, und ſetzt die Quotienten; ferner weil 3 hl. = $\frac{1}{2}$ kr. = $\frac{1}{60.2}$ = $\frac{1}{120}$ fl. ſo dividirt man noch einmal mit 120, oder weil man im Kopf dividirt, mit 60, welches leichter iſt; und halbirt hernach den Quotienten; worauf man die Partialprodukte addirt, die Summe iſt die Antwort auf die Frage; wenn man aber nicht fertig und geübt im Rechnen, beſonders im ſchnellen Dividiren iſt, ſo wird es beſſer ſeyn, wenn man die gewöhnliche Reduktion gebraucht.

5428	
14 fl. 26 kr. 3 hl.	
21712	
5428	
$1809\frac{1}{3}$	oder 20 kr.
$542\frac{8}{10}$	oder 48
$45\frac{28}{120}$	od. 14
78389 fl.	— 22 kr.

§. 386. Anmerk. Dieß ſind nun die Exempel von allen Gattungen der Regel Detri und der damit verbundenen Regeln, die man in der gemeinen Rechenkunſt zu geben pflegt; wir werden aber auch einige höhere Aufgaben, die aus den Gleichungen gerechnet werden, vorlegen.

Von höhern Aufgaben der praktiſchen Rechenkunſt.

§. 387. Die bisher vorgetragenen Aufgaben gehören zur praktiſchen Rechenkunſt; wenn man aber in den gewöhnlichen Rechenbüchern, in welchen die Buchſtabenrechnung mit dem, was dazu gehört, gar nicht vorgetragen wird, dennoch höhere Aufgaben anbringen, und ich weis nicht was für Regulas Coeci, Falſi, u. ſ. w. den Lehrlingen, als was ſonderbares, ohne weitere Anleitung empfehlen will, ſo geht man Umwege:

Z. E. Man ſoll 100 ſo theilen, daß der erſte Theil dreymal ſo groß als der andere, und der andere zweymal ſo groß als der dritte werde. Man ſetze, der kleinſte Theil ſey 2, ſo iſt der folgende $3 . 2 = 6$, und der dritte $2 . 6 = 12$. Nun iſt $2 + 6 + 12 = 20$, und nicht 100; folglich das Angenommene falſch; doch wird ſich 100 zu dem kleinſten Theil verhalten, wie 20 zu ſeinem kleinſten Theil. Das iſt $20 : 2 = 100 : \frac{2 . 100}{20} = 10$. Das wird der geſuchte Theil nach der Reg. Falſi ſeyn. Allein algebraiſch iſt das Exempel ſo leicht als kurz folgendermaſſen eingerichtet: $x + 3x + 6x = 100$, das iſt $10x = 100$, und $\frac{100}{10} = x = 10$. Daher keine ſolche Umwege, wie oben, nöthig ſind.

§. 388. In der gegenwärtigen Lehre von höhern Aufgaben werde ich ſolche Exempel wählen, bey denen ich jedesmal auf die im zweyten Hauptſtücke gegebene allgemeine Auflöſungen den Leſer verweiſen darf. Nur muß ich eines voraus melden, daß der Verſtand bey der erſten Setzung des Problems das meiſte thun müſſe, wenn man die vorkommenden Aufgaben richtig auflöſen will. Denn unſere Abſicht iſt, beſonders ſolche Exempel zu geben, welche mit Umſtänden, die man weglaſſen kann und ſoll, verbunden ſind; wodurch zugleich der Verſtand geſchärfet wird, aus individuellen Begriffen höhere und allgemeinere zu abſtrahiren.

§. 389. Die ganze Kunſt bey höhern Aufgaben beſteht darinnen, daß man den erſten Satz richtig ausdrücke, oder das Problem verſtehe und hernach richtig ſetze; denn wenn der erſte Satz

richtig ausgedrückt iſt, ſo darf man in den folgenden Sätzen nur kalkuliren, welches eben keine ſo groſſe Kunſt iſt. Ich will das Exempel, das ich in meinen Anfangsgründen aller mathematiſchen Wiſſenſchaften 1759. I. Th. §. 128. angeführt, und das zu dem Ende vom Newton ſchon vorgetragen wurde, auch hier wieder zu Grund legen, damit man ſehe, wie man ein Problem in Worten und in Zeichen recht ausdrücken, und was für Umſtände man weglaſſen könne.

Exempel.

Ein Kaufmann vermehrt ſein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahr zur Erhaltung ſeiner Familie 100 Pf. Sterl. davon weg; und wird nach drey Jahren noch einmal ſo reich, als er anfänglich war: wie viel hat er alſo Vermögen?

I. Ausdruck in Worten.	II. Ausdruck in Zeichen.
1) Ein Kaufmann beſitzt ein gewiſſes Vermögen,	x
2) wovon er das erſte Jahr 100 Pf. Sterl. braucht;	$x - 100$
3) den Reſt vermehrt er um den dritten Theil;	$x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
4) das zweyte Jahr braucht er wieder 100 Pf.	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
5) den Reſt vermehrt er abermal um den dritten Theil;	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$ *)
6) im dritten Jahr braucht er abermal 100 Pf.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
7) den Reſt vermehrt er noch einmal durch den dritten Theil,	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
8) und iſt noch einmal ſo reich als er im Anfang war.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x.$

*) Wenn man nämlich $\frac{4x-700}{3}$ zur Benennung 9 bringt, d. i. mit 3 multiplizirt ſo auch unten n. 7.

In

In dieſem letzten Satz iſt das Exempel geſetzt; man darf alſo nur kalkuliren, und x ſuchen:

Satz: $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} .27$$

$64x - 14800 = 54x$

$54x = 54x$ ſubtr.

$10x - 14800 = 0$

$14800 = 14800$ addirt

$10x = 14800$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} :10$$

$x = 1480$

§. 390. **Anmerk.** Dieſes vorausgeſetzt laſſen ſich folgende Aufgaben leicht auflöſen; wir wollen ſie in einige Klaſſen eintheilen, damit man ſogleich ſehe, in welche Gattung der Buchſtabenrechnung ſie gehören.

I. Exempel von einfachen Gleichungen.

Cajus wollte einen Garten um baar Geld kaufen, hat aber ſein Vermögen in Kapitalien ſtehen, zu dem Ende will er jedem ſeiner Schuldner einen Theil von ihrem Kapital aufkünden, weil es gute Schulden ſind, und er ſein übriges Vermögen gern unter vielen Schuldnern vertheilt behalten will; wenn er nun jedem 50. fl. aufkündet, ſo hat er 100 fl. zu viel, und wenn er jedem 40. fl. aufkündet, ſo hat er 200 fl. zu wenig; man fragt, wie viel er Schuldner habe, was ſein Garten koſte, und wie viel er jedem aufkünden müſſe, daß er weder zu viel, noch zu wenig zu dieſem Kaufſchilling einnehme.

Die Anzahl der Schuldner ſey x, ſo iſt der erſte Satz

$50x - 100 = 40x + 200$ der Werth des Garten.

$100 = 100$ add.

$50x = 40x + 300$

$40x = 40x$ ſubt.

$10x = 300$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} :10$$

$x = 30$ die Anzahl der Schuldner;

$50 \cdot 30 - 100 = 1400$ fl. der Werth des Garten;

$30 : 1400 = 1 : 140|0$ (Nebenrechnung: 22, 33|0) $46\frac{2}{3}$ fl. zahle ein jeder Schuldner.

Auf eben die Weiſe werden folgende Exempel berechnet.

Titius hat zween ſilberne Becher mit einem gemeinſchaftlichen Deckel, den er für 18. fl. ſchätzet; wenn er den Deckel auf den erſten Becher ſetzt, ſo iſt er noch ſo viel werth, als der andere; ſetzt er aber den Deckel auf den andern Becher, ſo ſind beyde gleichviel werth. Oder er hat zwo Tabatieren, legt er in die erſte 18. fl., ſo iſt ſie noch einmal ſo viel werth als die andere, legt er aber die 18. fl. in die andere, ſo ſind beyde gleichviel werth. Man fragt wie viel beyde Becher oder Tabatieren werth ſeyn? Der Werth der einen ſey x, der andern y, ſo iſt

Nr. I. $x + 18 = 2y$ und Nr. II. $y + 18 = x$

$: 2$ — $18 = 18$ ſubtr.

Nach $\frac{x + 18}{2} = y$ — $y = x - 18$

Nr. II. $x - 18 = y$

$$\frac{x + 18}{2} = x - 18$$

$$\cdot\ 2$$

$$x + 18 = 2x - 36$$

$$36 = 36 \quad \text{add.}$$

$$x + 54 = 2x$$

$$x = x \quad \text{ſubtr.}$$

$54 = x$. Der Werth des erſten Bechers oder der erſten Tabatiere; folglich

weil $y = x - 18$ nach Nr. II. ſo iſt, wenn man ſubtr.

$y = 54 - 18 = 36$. Der Werth des zweyten.

Eben ſo iſt das alte Exempel zu rechnen: Der Mauleſel ſagt zum Eſel, wenn du einen Zentner Laſt von mir nimmſt, ſo haben wir beyde gleich ſchwer; wenn aber ich einen Zentner von dir nehme, ſo trage ich noch einmal ſo ſchwer. Wie viel trug ein jeder? Es ſey die Laſt des Eſels y und des Mauleſels x, ſo iſt $x - 1 = y + 1$, folglich $x = y + 2$ und $x + 1 = (y - 1)\,2 = 2y - 2$; folglich $x = 2y - 3$, und alſo $y + 2 = 2y - 3$, und $y + 5 = 2y$, daher $y = 5$ die Laſt des Eſels, folglich $x = 7$ die Laſt des Mauleſels. Man begreift von ſelbſt, daß man dieſe Exempel allgemein machen kann, wenn man ſtatt der Zahlen, die gegeben ſind, die Buchſtaben a u. ſ. w. ſetzt.

II. Exem-

II. Exempel von einfachen Gleichungen und Proportionen.

Zween Boten machen einerley Weg; der eine geht ſpäter als der erſtere, aber läuft ſtärker; er wird alſo den erſten einholen. Geſetzt nun, der erſte mache des Tages vier Meilen; der zweyte gehe drey Tag ſpäter, und mache hingegen des Tages ſechs Meilen; wenn wird er den erſten einholen? Die geſuchte Zeit heiſſe x Tage; alſo wird der erſte Zeit brauchen 3 + x Tage; denn 3 Tage hat er voraus; und läuft noch ſo lang, bis ihn der zweyte einholt, das iſt, nach den ſchon geloffenen 3 Tagen noch x Tage. Der Raum oder Weg, denn er bis dahin durchloffen, wird (3 + x)4 Meilen machen; den jeden Tag macht er 4 Meilen; folglich in den erſten Tagen 3 . 4 Meilen, und in den noch rückſtändigen x Tagen x . 4 Meilen; der zweyte Bot läuft nur x Tage, jeden Tag aber 6 Meilen, das iſt, in x Tagen, x . 6 Meilen; der Weg, den beyde Boten laufen, iſt gleich; folglich $6 . x = (3+x)4$ oder $6x = 12 + 4x$, folglich $2x = 12$ und $x = 6$. Er holt ihn alſo in 6 Tagen ein. Oder allgemein: man ſetze die drey Tage, welche der erſte früher oder der andere ſpäter ausgegangen $= c$

Die Tagreiſe des erſten, das iſt 4 Meilen $= a$

Die Tagreiſe des letztern, das iſt 6 Meilen $= b$

ſo iſt, weil beyde einerley Weg machen, wie oben

$$\begin{array}{l} bx = ac + ax \\ ax = \quad\;\; ax \\ \hline bx - ax = ac \text{ oder} \\ (b - a)x = ac \text{ folglich} \\ x = \dfrac{ac}{b-a} \end{array}$$

Oder zween Körper, die mit verſchiedener Geſchwindigkeit bewegt werden, laufen einander nach; man giebt die Diſtanz des einen vom andern, und die Geſchwindigkeit beyder Körper; man ſoll die Zeit finden, wenn ſie zuſammen ſtoſſen. Die Diſtanz ſey $= c$, die Geſchwindigkeit des langſamen Körpers $= a$, des ſchnellen $= b$, ſo iſt, weil ſich die Zeiten wie die Geſchwindigkeiten hier verhalten,

$$\underline{a : b = x : c + x} \quad \text{folglich}$$

$$ac + ax = bx \quad \text{und}$$

$$ac = bx - ax = (b-a)x \quad \text{wie oben; daher}$$

$$\frac{ac}{b-a} = x.$$ Die allgemeine Formel für alle Fälle dieſer Art.

III. Exempel von Brüchen.

Man ſoll eine Zahl finden, deren Hälfte, dritter und vierter Theil um eins gröſſer als die geſuchte Zahl iſt: die geſuchte Zahl ſey x, ſo iſt

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$ oder unter einerley Benennung gebracht

$$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x = x + 1$$ das iſt addirt

$$\frac{26}{24}x = x + 1$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot 24$$

$$26x = 24x + 24$$

$$\underline{24x = 24x} \quad \text{ſubtr.}$$

$$2x = 24$$

$$\overline{\qquad\qquad} : 2$$

$$x = 12.$$ Folglich iſt 12 die einzige Zahl, die dieſe Eigenſchaft hat.

IV. Exempel von quadratiſchen Gleichungen.

Schwenter meldet von dem unter den Alten berühmten deutſchen Rechenmeiſter, Adam Rieſe, er habe über ſein Symbolum die Zahl 2 in folgender geheimnißvollen Geſtalt geſetzt $2\overset{2}{X}2$; nachgehends habe man herausgebracht, daß er es deßwegen gethan, weil die Zahl 2 die einzige ganze Zahl ſey, die quadrirt und zu ſich ſelbſt addirt, einerley Zahl gebe. Man verlangt alſo die Zahl, deren Duplum und Quadrat einander gleiche. Sie ſey x, ſo wird der Satz ſeyn:

x^2

$$x^2 = 2x$$
$$\overline{} : x$$
$$x = 2$$

Dieſe Aufgabe iſt alſo bey ganzen Zahlen beſtimmt; bey Brüchen iſt ſie unbeſtimmt, wie man leicht begreift, indem eine Menge Zahlen dieſe Eigenſchaft haben, wenn die Frage nicht auf ganze Zahlen eingeſchränkt wird.

Die Aufgaben, welche durch unreine quadratiſche Gleichungen aufgelöſt werden, ſind etwas ſchwerer. Z. E. Titia wird gefragt, wie alt ſie ſeye? ſie ſagt: meine Mutter hat mich im 40ſten Jahre ihres Alters gebohren; wird man nun mein Alter mit dem gegenwärtigen Alter meiner Mutter multipliziren, ſo kömmt das Alter Methuſalah, des älteſten unter allen Menſchen, heraus, der 969 Jahr gelebt hatte. Hieraus kann man mein und meiner Mutter Alter finden.

Der Titia Alter ſey	$= x$	
ſo wird der Mutter Alter ſeyn	$= x + 40.$	
Das Produkt davon	$x^2 + 40x = 969.$	eine unreine
Man addire nach §. 321.	$400 = 400$	quadr. Gleichung*)
	$x^2 + 40x + 400 = 1369$	
Hieraus iſt die Quadratwurzel	$x + 20 = 37.$	
	$20 = 20$	ſubtrahirt
	$x = 17$	der Titia Alter;
folglich	$17 + 40$	der Mutter Alter.

Ein anderes Exempel von einer reinen Gleichung iſt folgendes:

Ein Feldherr ſtellt ſeine Truppen in ein vollkommenes Quadrat, es bleiben ihm aber 284 Soldaten übrig; nun dieſe nicht müſſig ſtehen zu laſſen, vertheilet er in jede Reihe einen Soldaten weiter, es fehlen ihm aber hiezu noch 25. Man fragt, wie viel er Soldaten gehabt habe? Die Seite des erſten Quadrats ſey $= x$; ſo iſt die Anzahl der Soldaten $x^2 + 284$. Des andern Quadrats Seite iſt nach der Aufgabe $x + 1$, folglich ſein Quadrat $x^2 + 2x + 1$, und die Anzahl der Soldaten in dieſem Fall $x^2 + 2x + 1$ —

(*) Nämlich den Koeffizienten des doppelten Produktes 40x halbirt man = 20, und quadrirt ihn dann = 400.

$- 25 = x^2 + 2x - 24$. Folglich weil die Anzahl der Soldaten einerley iſt,

$$x^2 + 284 = x^2 + 2x - 24.$$ Und wenn man x^2 beyderſeits ſubtr.

$$284 = 2x - 24.$$ Addirt man nun beyderſeits 24, ſo iſt

$$308 = 2x \text{ und } x = 154.$$ folglich die Anzahl Soldaten

$$(154 . 154) + 284 = 24000.$$

V. Exempel, welche durch Progreßionen und Logarithmen aufgelöſet werden.

Wenn einer ſein Geld auf Leibrenten giebt, ſo muß man dieſe Rechnung verſtehen. Ich will ein kurzes Exempel geben:

Cajus hat ſein Geld in Zinſen ſtehen; hat aber nicht genug an den Zinſen, und muß vom Kapital jährlich zuſetzen. Geſetzt nun, er brauche alle Jahre gleichviel, und wollte wiſſen, wie lang er noch leben darf, oder wie lang es noch anſtehe, bis er nichts mehr einzunehmen habe, ſo kann man die Sache folgender maſſen berechnen.

Das Kapital ſey $= a$
Jährlicher Zins oder das landläufige Prozent heiſſe $= \frac{n}{m}$
Das was er im erſten Jahr zuſetzt $= b.$
Die Zeit, wie lang er es treiben kann, das iſt die Anzahl der Jahre, die man ſucht $= x$

So wird er das erſte Jahr

I. An Zinſen brauchen eine Summe $= \frac{na}{m}$
und an Kapital zuſetzen $= b$

das iſt, das erſte Jahr wird er verzehren die Summe $= \frac{na}{m} + b$
Eine Summe, die in allen folgenden Jahren gleich groß iſt.

II. Das nächſte zweyte Jahr wird ſein Kapital, weil er b zuſetzte, nur noch ſeyn $= a - b$ alſo wird er auch weniger Zinſen einnehmen; nämlich gerade ſo viel weniger als b ausgeworfen hatte:

das iſt, der Verluſt an Zinſen iſt $= \frac{nb}{m}$

und folglich die Einnahme in Zinſen $= \frac{na}{m} - \frac{nb}{m} = \frac{na - nb}{m}$

Er ſetzt aber das zweyte Jahr wiederum zu, damit er gerade ſo viel wieder einnehme, als er das vorige Jahr eingenommen; er muß alſo erſtlich b und ſodann noch ſo viel vom Kapital zuſetzen, als er weniger Zins eingenommen, das iſt, als b das Jahr vorhergetragen hatte, d. i. $\frac{nb}{m}$, folglich iſt der ganze Zuſatz vom Kapital im zweyten Jahr zuſammen addirt $b + \frac{nb}{m}$, oder unter einerley Benennung gebracht $\frac{mb + nb}{m} = \frac{(m+n)}{m}.b.$

III. Was er das dritte, vierte und folgende Jahr zuſetzen muß, findet er durch die Regel Detri nach einer kontinuirlichen Proportion; wie ſich der Zuſatz des erſten Jahrs zum Zuſatz des zweyten Jahrs verhält, ſo verhält ſich der Zuſatz des zweyten Jahrs zum Zuſatz des dritten, und ſo dieſer zum Zuſatz des vierten; das iſt in Buchſtaben:

$b : \frac{(m+n)}{m}.b = \frac{(m+n)}{m}.b : y$ oder wenn man die erſte Verhältniß mit b dividirt

$\overline{\qquad\qquad} : b$

$1 : \frac{m+n}{m} = \frac{(m+n)}{m} b : y$ folglich y oder Zuſatz des 3. Jahrs

$= \frac{(m+n)^2}{m^2} b$.

 und

und weil ferner, da die erſte Verhältniß immer bleibt, durch Hilfe der Diviſion,

$1 : \frac{m+n}{m} : \frac{(m+)n^2 b}{m^2} : z$, ſo iſt der Zuſ. des 4ten Jahres $= \frac{(m+n)^3}{m^3} b$

und eben ſo der Zuſatz des fünften Jahrs $= \frac{(m+n)^4}{m^4} b$

Alſo iſt jedesmal der Exponent von m+n um eins weniger als die Anzahl der Jahre. Daher der Zuſatz vom letzten oder vom xten Jahr $= \frac{(m+n)^{x-1}}{m^{x-1}} b$.

Man hat daher folgende Progreßion:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & x \\ \text{jährl. Zuſ.} & b, & \frac{b(m+n)}{m}, & \frac{b(m+n)^2}{m^2}, & \frac{b(m+n)^3}{m^3}, & \frac{b(m+n)^4}{m^4}, & \frac{b(m+n)^{x-1}}{m^{x-1}} \end{matrix}$$

Die Summe aller dieſer x Zuſätze iſt dem ganzen Kapital gleich, weil es durch die jährliche Zuſätze nothwendig zuletzt aufgehen muß. Da nun die Summe der gefundenen geom. Progreſſion nach §. 388. gefunden werden kann, ſo iſt nach ſelbigem §. das Kapital $a = \left(\frac{b(m+n)^x}{m^x} - b\right) : \frac{m+n}{m} - 1$

Und wenn man den Diviſor unter einerley Benennung bringt $\frac{m+n}{m} - 1 = \frac{m+n-m}{m}$

$$\frac{m+n-m}{m} = \frac{n}{m}$$

$$a = \left(\frac{b(m+n)^x}{m^x} - b\right) : \frac{n}{m} \text{ d.i. nach §. 70} = \left(\frac{b(m+n)^x}{m^x} - b\right) \cdot \frac{m}{n}$$

Und wenn man wirklich multiplizirt $a = \frac{mb(m+n)^x}{nm^x} - \frac{mb}{n}$

Jetzo darf man nur fort kalkuliren $\frac{mb}{n} = \frac{mb}{n}$ add.

$$a + \frac{mb}{n} = \frac{mb(m+n)^x}{nm^x}$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot n$$

$$na + mb = \frac{mb(m+n)^x}{m^x}$$

$$\overline{\qquad\qquad} : m$$

$$\frac{na}{m} + b = \frac{b(m+n)^x}{m^x}$$

Dieſe Gleichung logarithmiſch ausgedrückt nach §. 308. giebt $l\left(\frac{na}{m} + b\right) = lb + xl(m+n) - xlm$

$$lb = lb \quad \text{ſubtr.}$$

$$l\left(\frac{na}{m} + b\right) - lb = xl(m+n) - xlm$$

$$\overline{\qquad\qquad} \text{in Fakt.}$$

$$= x(l(m+n) - lm)$$

$$\overline{\qquad\qquad} : l(m+n) - lm$$

$$\frac{l\left(\frac{na}{m} + b\right) - lb}{l(m+n) - lm} = x.$$

§. 391. Wenn man das Exempel in Zahlen auflöſt, ſo ſetzt man für Buchſtaben die gehörigen Zahlen; z. E. das Kapital ſey 5000 fl. ſo iſt $a = 5000$; der Zins ſey 5 Prozent; ſo iſt $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$; denn 5 iſt der zwanzigſte Theil von hundert; folglich $\frac{na}{m} = \frac{5000}{20} = 250$; es ſey der jährliche Zuſatz 50 fl., ſo iſt $b = 50$, und $\frac{na}{m} + b = 250 + 50 = 300$, und weil $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$ ſo iſt $n = 1$, $m = 20$, und $n + m = 21$. Alſo nach der Formel

$$x = \frac{l\left(\frac{na}{m} + b\right) - lb}{l(m+n) - lm} = \frac{l\ 300 - l\ 50}{l\ 21 - l\ 20}$$

Schlägt man nun die Logarithmen dieſer Zahlen in den Tabellen auf, ſo iſt

l.

l. 300 = 2,4771213	l. 21 = 1,3222193
l. 50 = 1,6989700	l. 20 = 1,3010300
l. 300 − l. 50 = 0,7781513	l. 21 − l. 20 = 211893

alſo $\frac{l.300 - l.50}{l.21 - l.20} = \frac{0,7781513}{211893} = 36 \frac{153365}{211893}$ Jahr = 36 Jahr 264 Tag.

§. 392. Man begreift von ſelbſt, daß man durch dieſe Formel auch das Kapital finden kann, wenn die Anzahl der Jahre gegeben iſt, wie man auch den jährlichen Zuſatz aus den gegebenen Jahren und Kapital finden kann. Das hier berechnete Exempel, die Jahre zu finden, haben wir deswegen ausführlich vorgetragen, damit man auch ein Exempel von Logarithmen habe. Unerachtet man es übrigens auch auf eine andere Art berechnen könnte.

§. 393. Ich will noch ein Exempel vom Interuſurio geben, wie ſolches Herr von Leibnitz berechnet, und Herr geh. R. Bilfinger gegen die Herren Juriſten vertheidiget hat. Wenn ich einem hundert Gulden nach einem Jahre erſt zu bezahlen ſchuldig bin, ich will ihn aber itzt gleich bezahlen, ſo fragt man, wie viel ich ihm geben müſſe, das Kapital zu fünf Prozent gerechnet? Gebe ich ihm jetzo 100 fl., ſo gehören mir innerhalb einem Jahr 5 fl. zurück; (weil ich nach Jahresfriſt von dieſen 100 fl. 5 Prozent erheben könnte, und alsdann erſt die 100 fl. zahlen dürfte). Er giebt mir aber jetzo gleich die 5 Prozent zurück, folglich werde ich ihm in Jahresfriſt den Zins von 5 fl. nämlich 15 kr. ſchuldig; dieſe will ich ihm auch jetzt gleich zurück geben; er wird mir alſo in Zeit eines Jahrs den Zins von 15 kr. wieder ſchuldig ſeyn; ſo geht es fort, daß immer einer dem andern aufs neue etwas ſchuldig wird. Wenn nun das Kapital a, und der landläufige Zins zu 5 Prozent $\frac{1}{20}$, ſo giebt es folgende Reihe

$$a - \frac{a}{20} + \frac{a}{20^2} - \frac{a}{20^3} + \frac{a}{20^4} - \frac{a}{20^5} + \frac{a}{20^6} \text{ u. ſ. w.}$$

Die Summe dieſer Reihe iſt nach §. 296. $\frac{20a}{20+1} = \frac{20}{21}a$.

Eben ſo geht es bey zwey Jahren:

Kajus iſt mir eine gewiſſe Summe erſt nach zwey Jahren zu bezahlen ſchuldig; was muß er mir geben, wenn er mich übers

Jahr

Jahr ſchon bezahlen will? Antw. $\frac{20}{21}$a. Nun ſey $\frac{20}{21}a = b$, man fragt, Kajus iſt mir übers Jahr $\frac{20}{21}a = b$ ſchuldig, was muß er mir geben, wenn er mich jetzo gleich bezahlt?

Antwort $\frac{20}{21}$b. Nun iſt

$$b = \frac{20}{21}a \text{ alſo ſubſtituirt}$$

$$\frac{20}{21} \cdot \frac{20}{21}a = \frac{20^2}{21^2}a;$$

Eine ähnliche Rechnung macht man bey drey Jahren; bey welchen $\frac{20^3}{21^3}$a herauskömmt; folglich wird für n Jahre $\frac{20^n}{21^n}$a herauskommen. Dieſe Rechnung haben verſchiedene Rechtsgelehrte, und unter dieſen ſelbſt Herr **Pohlak** in Matheſi forenſi, wie er es p. 53. 54. edit. 2. geſteht, unrichtig verſtanden, und daher **Leibnitzen** eines Irrthums, auch pravitatis uſurariæ beſchuldigt. Auf die Belehrung Herrn geh. R. **Bilfingers** aber geſtand er die gemachten Fehler, wollte aber doch nicht nachgeben, theils wegen den Geſetzen l. 28. C. de Vſur. l. 26. pr. ff. de condict. indebiti, und wegen den damit übereinſtimmenden Placitis aller JCtorum, theils weil er glaubte, Herrn geh. Rath **Bilfingers** Fall ſey moraliſch unmöglich; indem der Kreditor, um keinen Schaden zu haben, den Augenblick ſo bald die Zinſen einlaufen, ſie wieder anderswo auf Zinſe anlegen müßte. Allein Herr geh. Rath **Bilfinger** ließ es bey dem erſten Aufſatz ohne Antwort bewenden. Denn wenn man einem ſolche Einwürfe macht, ſo werden die Verſtändige unter dem gelehrten Publikum auf keine Antwort mehr warten, ſondern ſelbſt antworten können. Der letzte Einwurf war beſonders von einem ſo gelehrten Mann, als Herr Prof. **Pohlak** war, faſt nicht zu vermuthen. Es iſt ja ein Unterſchied zwiſchen 8 bis 14 Tagen, und zwiſchen ganzen Jahren. Wenn der Zins in 14 Tagen wieder angelegt wird, ſo verliere ich zwar etwas, aber nicht ſo viel, als wenn ich ihn gar nicht anlege. Das Augenblickliche iſt nur von **Leibnitzen** angenommen, um die Rechnung zu erleichtern und faßlich zu machen; hätte man einen Zwiſchenraum zwiſchen dem Eingehen und Anlegen der Zinſe angenommen, ſo würde man eine eben ſo richtige Rechnung heraus bringen können, ſie würde nur etwas ſchwerer ſeyn; daher die Herrn Gegner ſich noch mehr

darinnen

darinnen, aus Unwiſſenheit, verfehlen könnten, als in der Leibnitziſchen erſten und natürlichen Rechnung, die ſie nicht einmal verſtunden, bis ſie Herr geh. Rath Bilfinger erklärt hat. Was aber den Jurid. Einwurf aus l. 28. C. de Vſuris. u. ſ. w. betrift, ſo muß man es ſich gefallen laſſen, wenn die Geſetze etwas wider die Regeln aller ökonomiſchen Billigkeit und Klugheit befehlen. Inzwiſchen wird man doch kein Geſetz aufweiſen, daß einem nicht frey ſtehe, entweder auf baar Geld oder auf Zieler zu handeln. So lang nun dieſe juridiſche Geſetze währen, ſo wird allemal ein Oekonom, der nur ein wenig rechnen kann, und nicht wider ſeinen Nutzen handeln will, beſonders bey groſſen Summen, auf baar Geld und nie auf Zieler handeln. Da nun dieſes frey ſteht, ſo werden, wo dieſe ökonomiſche Klugheit angewandt wird, die obigen Geſetze nach und nach von ſelbſt unbrauchbar werden, wenn keine Fälle mehr vorkommen, worinn ein anderer erſt über zehen oder zwanzig Jahren was zu bezahlen ſchuldig ſeyn dörfte.

Die

Die geometriſchen Wiſſenſchaften,

oder

die Elementargeometrie, die Trigonometrie, die praktiſche Geometrie, und die höhere Geometrie.

Er=

Erſtes Hauptſtück,

von der

gemeinen oder Elementargeometrie.

Erklärung.

§. 394.

Die **Geometrie** iſt eine Wiſſenſchaft der Gröſſen, in ſofern man auf die Lage, Ordnung und Verbindung ihrer Theile ſieht; und in dieſem Stücke iſt ſie von der Arithmetik unterſchieden. Ihre Gegenſtände ſind alſo gerade und krumme Linien, und die verſchiedenen Verhältniſſe der Linien, Figuren, Flächen, Körper. Wenn man nun die geraden Linien, und unter den krummen nur die Zirkellinie, nebſt den darauf ſich beziehenden Figuren, Flächen und Körpern betrachtet, ſo handelt man die ſogenannte Elementargeometrie ab, welche von den Elementen des **Euklides** dieſen Namen hat; dieſe erſten Gründe der Geometrie werden wir jeßo im erſten Hauptſtücke der geometriſchen Wiſſenſchaften vortragen, vorher aber das Nöthigſte von ihrer Geſchichte noch ſagen.

Geſchichte der Geometrie.

§. 395. Die erſten Anfänge der Geometrie muß man bey den Egyptern ſuchen, welche durch die jährliche fruchtbare Ueberſchwemmung des Nils genöthigt wurden, ihre Felder von neuem wieder abzumeſſen und einzutheilen; doch müſ-

ſen dieſe erſten Anfänge blos praktiſch geweſen ſeyn, weil in den folgenden Zeiten, z. E. nur ein Pythagoras, der doch bey den Egyptern die Geometrie gelernt, erſt nach ſeinem empfangenen Unterricht neue Sätze erſunden, deren vorherige Unwiſſenheit oder Mangel unter den Egyptern noch von einer ſehr geringen Theorie einen zulänglichen Beweis giebt. Denn wenn zu Pythagoras Zeiten die Egypter den pythagoriſchen Lehrſatz noch nicht wußten, ſo müſſen ſie ſehr mittelmäßige Geometer geweſen ſeyn, oder die Nachkommen müſſen die Wiſſenſchaften ihrer Vorfahrer vergeſſen haben, wenn man etwa denken möchte, zu Salomons, und noch früher, zu Moſis Zeiten, ſeyn auch die mathematiſchen Wiſſenſchaften unter den Egyptern im höchſten Flor geweſen.

§. 396. Was nun die älteſte Geſchichte der theoretiſchen Geometrie betrift, ſo ſoll in Rückſicht auf die Zeitordnung, **Euphorbus** aus Phrygien der erſte geweſen ſeyn, welcher die Linien und ihre Verhälteniß betrachtete, und das ungleichſeitige Dreyeck, wie **Laertius** berichtet, erfunden hat. Auf ihn folgte **Thales** von Miletus, 632 vor Chriſti Geburt, der erſt im Alter eine Reiſe nach Egypten that, und ſich von den daſigen Prieſtern unterrichten ließ, und die Höhe der Pyramiden aus dem Schatten, den ſie warfen, meſſen lernte. Er hat die Gleichheit der Vertikalwinkel und der Winkel an der Grundlinie eines gleichſchenklichten Triangels erfunden. Ueberdieß meldet Proklus von ihm, er ſey der erſte geweſen, der bewieſen, daß der Zirkel durch einen jeden Diameter in zween gleiche Theile getheilet werden, und daß man in den Zirkel ein gleichſeitiges Dreyeck einſchreiben könne; für welche letztere Erfindung er dem Jupiter einen Ochſen geopfert habe. Woraus man ſieht, daß er bey den Egyptern auſſer dem Praktiſchen wenig Theorie gelernet haben müſſe; ſonſt würden ihm dieſe erſten Erfindungen der Geometrie nicht eigenthümlich zugeſchrieben worden ſeyn, ſondern vielmehr würde man ſagen müſſen, er habe ſie aus Egypten mitgebracht. Auf ihn folgte **Pythagoras**, der zuerſt den Namen der Mathematik aufbrachte; er reiſete in ſeiner Jugend, da er kaum zwanzig Jahre alt war, nach Egypten, und da er im vierzigſten Jahre nach Italien zurück kam, ſo erwarb er ſich in der Philoſophie und Mathematik einen Namen. Seine eigenen Erfindungen beſtätigen das, was wir von den Egyptern §. 395. geſagt haben. Denn die von ihm ſich herſchreibende Erfin-

dung,

dung, daß die Winkel eines jeden geradelinigten Dreyecks zween Rechten oder 180° gleich ſeyn, wie auch der berühmte ſogenannte Pythagoriſche Lehrſatz, daß im rechtwinklichten Dreyeck das Quadrat der größten Seite den beyden Quadraten der übrigen Seiten zuſammen genommen gleich ſey, ſind ſo nothwendige Sätze, daß die Egypter ohne deren Kenntniß keine ſonderliche theoretiſche Geometer ſeyn könnten; ſonſt müßte Pythagoras nur ein Plagium begangen, und ſich die Ehre einer Erfindung zugeſchrieben haben, die er den Egyptern zu danken hatte. Für die letztere berühmte Erfindung hat er den Göttern oder den Muſen eine Hekatombe geopfert, wie die alten Verſe lehren:

Pythagoras quondam Dis fecit nobile ſacrum,
Inventa eſt illi linea quod celebris.

Plutarch ſagt, es ſey nur ein Ochs geweſen; Cicero glaubt, der Ochs ſey nicht natürlich, weil Pythagoras die Schlachtung der Thiere für eine Sünde gehalten, ſondern ein von Mehl, oder, wie Porphyrius meynt, ein von Leimen gemachter Ochs geweſen. Pythagoras ſtarb im 80. Jahr ſeines Alters, 540 Jahr vor Chriſti Geburt. Nicht lange hernach kamen die philoſophiſchen Schulen zu Athen auf; Sokrates war ihr Stifter, und ungeachtet er, wie es ein jeder vernünftiger Menſch billigen wird, mehrmalen ſagte, man ſoll ſich nicht zu viel und allein auf dieſe Wiſſenſchaft legen, weil man ſonſt von vielen nützlichen Geſchäften des geſellſchaftlichen Lebens abgezogen würde, ſo war er doch der Geometrie nicht unkundig. Plato, ſein Schüler, war ſchon mehr dafür eingenommen, und nahm keinen Zuhörer in ſeine Akademie auf, der die Geometrie nicht wußte; erklärte auch alle Tage, neben andern philoſophiſchen Lehrſätzen, ein geometriſches Problem. Er ſtarb 346 Jahr vor Chriſti Geburt. Die philoſophiſchen Anſtalten zu Athen machten unter dem Plato und ſeinen Nachfolgern dieſem Muſenſitze auch in den mathematiſchen Wiſſenſchaften Ehre genug! Das Delphiſche Problem von Verdopplung des Kubus iſt bekannt. Hippokrates von Chius, ein durch die Seeräuber verunglückter Kaufmann, kam nach Athen, ſich über den an ihm begangenen Raub zu beklagen, er wurde mit den Philoſophen bekannt, verließ das vorige Gewerb, und legte ſich mit ſolchem Erfolg auf die Geometrie, daß er der erſte von denen war, welche das Delphiſche Problem auf die Erfindung zwoer mittlern Proportionallinien zwiſchen zwo gegebenen Linien reduzirte; von dieſer Zeit an wurde nun das Problem nach der letztern Weiſe immer aufgegeben. Eben dieſer

Hippokrates hat ſich auch auf die Quadratur des Zirkels verlegt, und man hat von ihm die ſogenannte Lunula Hippocratis, die er vollkommen geometriſch quadrirte. Sie nützt aber zur Quadratur des ganzen Zirkels, wie wir an ſeinem Ort hören werden, weiter nichts. Wie dann überhaupt dieſes Geſchäft in unſern Tagen etwas unnützes iſt, dafür ſich niemand eine groſſe Belohnung verſprechen dürfte. Wovon an ſeinem Ort mit mehrerem gehandelt werden ſoll.

397. In dieſem Zuſtande befanden ſich nun die geometriſchen Wiſſenſchaften bis auf den **Euklides**, der 300 Jahre vor Chriſti Geburt als der erſte Lehrer der Mathematik zu Alexandrien auch das erſte und allerbeſte geometriſche Handbuch geſchrieben hat. Er iſt von dem Euklides aus Megara, mit welchem ihn einige für eine Perſon halten, wohl zu unterſcheiden. Denn Diogenes Laertius hat des Megarenſiſchen Euklides Leben genau beſchrieben, und alle ſeine Schriften ſorgfältig aufgezeichnet; unter dieſen Schriften aber ſtehen die vortreflichen Elemente der Geometrie nicht. Sie müſſen alſo nicht von dem Megarenſiſchen, ſondern von einem andern Euklides herkommen. Ueberdas war der Megarenſiſche Euklid, nach dem **Diog. Laert.** ein finſterer, mürriſcher, zankſüchtiger Philoſoph; der alexandriniſche Geometer aber der angenehmſte, freundlichſte und liebenswürdigſte Mann von der Welt, wie ihn Pappus nennt; ein Karakter, der den nachfolgenden Geometern in neuern Zeiten nicht immer beygelegt wird. Wiewohl Herr von **Leibnitz** eben ſo wenig finſteres, und hingegen eben ſo viel leutſeliges an ſich hatte, als der alexandriniſche Euklid. Dieſer Geometer ſchrieb nun ein mathematiſches Handbuch oder 15 Elemente in griechiſcher Sprache, welche in das Lateiniſche überſetzt, von verſchiedenen Kommentatoren erklärt, und von dem **Dechales** ſo hoch gehalten wurden, daß er ſie nach der heiligen Schrift für das allerbeſte Buch in der Welt angeprieſen. Die erſte gedruckte Auflage kam 1482 zu Venedig heraus.

§. 398.

§. 398. **Joh. Scheubel**, Prof. der Math. zu Tübingen, hat 1550 die ſechs erſten Elemente des Euklides in ſofern verändert herausgegeben, daß er in den Demonſtrationen alles ohne einige Buchſtaben, deren ſich Euklides bedient, mit den eigenen Namen der Sachen vorträgt; andere, wie **Chriſtian Härlin** und **Con. Daſypodius** zu Straßburg, haben ſeine Beweiſe in förmliche Syllogiſmen reſolvirt. Noch andere wie **Petr. Ramus**, der zu ſeiner Zeit vor etlich hundert Jahren für den größten Philoſophen zu Paris gehalten wurde, und **Laz. Schoner** haben die Ordnung im Euklide verbeſſern wollen. **Ramus** ſchrieb daher 27 Elemente, die er und ſein Anhang den Euklideiſchen vorzog; zu Frankfurt am Mayn kamen ſie 1599 unter folgendem Titel heraus: *Petri Rami* Arithmetices libri duo, Geometriæ ſeptem & viginti, a *Laz. Schonero* recogniti & aucti. Allein weder die Lehrart, noch die Ordnung des Euklides ließ ſich durch dieſe Bemühungen verdrängen, indem die größten Kenner immer den ungeänderten Euklides allen andern Arbeiten vorgezogen. Nach dieſem folgte **Archimedes** von Syracus, der ſich 250 Jahre vor Chriſti Geburt einen bleibenden Namen machte, und wie in der Mathematik überhaupt, alſo auch beſonders in der Geometrie ſeinen erfindſamen Geiſt zeigte. In der ſphäriſchen Geom. hat man von ihm den ſchönen Lehrſatz, daß die Kugel ⅔ von Cylinder ſey, der einerley Höhe und Grundfläche mit ihr habe. Den Beweis davon ſoll er auf ſein Grabmal, als ein ewiges Monument, zu ſtechen befohlen haben. Er wurde bey der Einnahme von Syracus durch einen Soldaten über ſeinen Zirkeln im 75 Jahre ſeines Alters erſtochen. Die übrigen von den Alten, z. E. einen Apollonius, Pappus u. ſ. w. welche vorzüglich die koniſchen Sektionen betrachteten, wollen wir in der Geſchichte der höhern Geometrie nennen. Von den Elementen des Euklides merken wir noch an, daß ſeit Erfindung der Buchdruckerkunſt die erſte und ungemein ſeltene Ausgabe 1482 in der Druckerey **Erhard Ratdolts** in Augsburg herauskam, die Herr Prof. Käſtner in einem Schreiben 1750 an Herrn Kard. Quirini rezenſirt, und davon ich auch in meinen Amoenit. nov. lit. als einem in der Herzogl. Regierungsrathsbibliothek zu Stutgart befindlichen Werk Nachricht gegeben habe.

§. 399. Die Geometrie wurde nun auf dieſem Fuß erhalten, bis vor etlich hundert Jahren mit den übrigen Wiſſenſchaften auch die Geometrie wieder Zuſätze bekam. Den Franc. Vieta haben wir ſchon genannt §. 126. Er iſt aber auch in der Geſchichte der gegenwärtigen Wiſſenſchaft zu nennen. **Apollonius** gab ein Problem auf, das er περὶ ἐπαφῶν nannte, das iſt, einen Zirkel zu be-

beſchreiben, den drey andere gegebene berühren. Adr. Romanus, ein Niederländer, der aber von Löwen nach Würzburg ſich begab, und daſelbſt wohnhaft wurde, glaubte, man müſſe es durch Hilfe der Hyperbeln auflöſen. Vieta hingegen zeigte, daß es aus den Elementen und blos geometriſch reſolvirt werden könne. Romanus hielte dieſe Auflöſung ſo hoch, daß er ſogleich von Würzburg aus nach Frankreich reiſete, den Vieta ſprach, und da er ihm vorher ganz unbekannt war, eine ſehr genaue Freundſchaft mit ihm deßwegen ſtiftete. Bey ſeiner Heimreiſe zahlte ihm Vieta die Reiſekoſten, und that ihm viele Ehre an; wie Thuanus L. 129. Hiſt. ſchreibt.

§. 400. In dem gegenwärtigen Jahrhundert hat der Freyherr von **Wolf** die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke aus dem philoſophiſchen Begriff der Aehnlichkeit zu erklären geſucht, und daher in ſeinen mathematiſchen Schriften den alten Euklideiſchen Vortrag und Beweis weggelaſſen; ob er dadurch mehr Deutlichkeit in die Geometrie gebracht, ſteht nach dem Urtheile verſchiedener Kenner noch dahin; wenigſtens ſollte der Euklideiſche Vortrag auch noch beybehalten worden ſeyn. In unſerer Abhandlung wird man ihn nicht vermiſſen; wir werden aber den Wolfiſchen Beweis auch anführen, und hernach den Leſer aus beyder Vergleichung ſelbſt urtheilen laſſen. Das Weitere, das hier etwa noch geſagt werden könnte, wird in der Ausführung vorkommen.

Allgemeine Sätze von Linien, Winkeln und Figuren.

§. 401. **Erklär. Geometriſche Körper** ſtellt man ſich als etwas zuſammenhangendes dergeſtalten vor, daß, wo ein Theil aufhöret, ſogleich der andere unmittelbar anfängt: Dieſes unmittelbare Zuſammenhängen heißt eine **ſtätige Gröſſe**, (Continuum,) und die **geometriſche Ausdehnung**, in die Länge, Breite und Tiefe, nach ebenen oder krummen Richtungen, iſt überhaupt ein Raum, den das Continuum oder die ſtätige Gröſſe nach allen Seiten zu ausfüllt.

füllt.

füllt. Die Gränzen des Körpers heißt man **Flächen**, die Gränzen der Flächen **Linien**, die Gränzen der Linien **Punkte**.

§. 402. **Zuſatz**. Weil die Gränze eines Körpers kein Körper mehr iſt, ſo hat die Fläche keine körperliche Ausdehnung, das iſt, der Körper beſteht nicht aus Flächen; eben ſo beſteht die Fläche nicht aus Linien, weil die Linien ihre Gränzen ſind; und aus gleichem Grunde erhellet, daß die Linie nicht aus Punkten beſtehe, oder daß die Punkte keine Theile der Linien ſeyn.

§. 403. **Zuſatz**. Dem ungeachtet giebt es überall Punkten in den Linien, weil kein auch noch ſo kleiner Theil der Linie gedacht werden kann, der nicht einen Anfangs- und Endpunkt hätte; und weil die Theile der Linie, ſie mögen groß oder klein ſeyn, wieder Linien ſind, ſo beſteht die Linie aus unendlich viel unendlich kleinen Linien, das iſt, der Verſtand ſtellt ſie als unendlich theilbar vor, wie auch die Flächen und Körper.

§. 404. **Erklär**. Eine **gerade Linie** (linea recta) iſt, deren Theile alleſamt einerley Richtung (Directio) haben, oder nach einer und eben derſelben Gegend, oder nach einem Punkt zu liegen; *Fig*. 5. **eine krumme** aber, deren kein Theil mit dem andern einerley Richtung hat. *Fig*. 6.

§. 405. **Zuſatz**. Durch zween Punkte überhaupt wird alſo die Lage, (Poſitio,) und durch die zween Endpunkte die Länge, (Magnitudo,) einer geraden Linie gegeben; und zwiſchen zween Punkten läßt ſich nur eine gerade Linie ziehen.

§. 406. **Anmerk**. Man kann daher die gerade Linie auch als den kürzeſten Weg zwiſchen zween Punkten, und die krumme als einen jeden andern Weg anſehen, doch ſo, daß niemal ein Theil des Wegs gerade gehe. Oder wie der Freyherr von Wolf definirt; eine gerade Linie iſt, deren jeder Theil dem Ganzen ähn-

lich iſt; da die Theile der krummen Linie dem Ganzen unähnlich ſind.

§. 407. Anmerk. Die krumme Linie iſt alſo von der Neigung zwoer geraden Linien in einem Punkt doppelt unterſchieden; denn erſtlich läßt ſich in den krummen Linien kein gerader Theil angeben, und zweytens kann man nicht beſtimmen, wie weit die Richtung des Punkts jeden Augenblick von der vorigen verſchieden ſey, oder bey dem Zirkel, wo ſie zwar einerley iſt, wie groß die Neigung ſey.

§. 408. **Willk. Satz.** Man mißt eine gerade Linie, durch Ruthen, Schuhe, Zolle; eine Ruthe hält im geometriſchen Maaße 10 Schuh, ein Schuh 10 Zoll, ein Zoll 10 Linien; Ruthen ſchreibt man durch eine o, Schuh durch ′, Zoll durch ″, Linien durch ‴, z. E. 12° 3′ 5″ 6‴. Was man ſonſt für Maaße hat, wird in der praktiſchen Geometrie gezeigt werden.

§. 409. **Erklär. Ebene Flächen** (Superficies plana) ſind, von deren jedem Punkt zum andern man gerade Linien ziehen kann; ſo daß alle Punkten dieſer Linien in der Fläche liegen; bey **krummen Flächen** läßt ſich kein ebener Theil angeben.

§. 410. **Erkl.** Ein **Zirkel** *Fig.* 7. entſteht, wenn ſich eine gerade Linie AC um einen feſten Punkt C herum bewegt. Die krumme Linie, die durch dieſe Bewegung entſteht, heißt die **Peripherie** ADEBGF. Der Punkt C, um welchen ſich AC bewegt, iſt der **Mittelpunkt** (Centrum,) Eine jede gerade Linie von dem Mittelpunkt C bis an die Peripherie hin, heißt der **Radius**, eine Linie von einem Punkt der Peripherie zum andern die **Sehne** (Chorda) FG, und wenn ſie durch den Mittelpunkt geht, der **Diameter** oder **Durchmeſſer** AB, die größte Chorde; die gerade Linie, die den Zirkel berührt, ohne ihn zu ſchneiden, wie AT die **Tangente**, ein Theil der Peripherie wie AD, DE, ein **Bogen**, (Arcus circuli) ein Theil der

Zir-

Zirkularfläche, wie DCE, zwiſchen dem Bogen und den Radien ein **Ausſchnitt** des Zirkels (Sector Circuli) und ein anderer zwiſchen der Sehne und dem Bogen, wie FHG, ein **Abſchnitt** oder Segmentum.

§. 411. **Willk. Satz.** Man theilet die Peripherie in 360 Theile, die man **Grade** heißt, weil dieſe Zahl ſich ohne Bruch durch viel andere dividiren läßt; der 60ſte Theil eines Grads heißt eine Minute, der ſechzigſte Theil einer Minute eine Sekunde u. ſ. w. Man ſchreibt ſie wie im Längenmaaß, die Ruthen, Schuhe, Zolle; die Grade = o, die Minuten = ′, die Sekunden = ″ u. ſ. w. z. E. 36°, 17′ 38″ 5‴ ſind 36 Grad, 17 Minuten, 38 Sekunden, 5 Terzen; welche nach der Sexageſimalrechnung berechnet werden.

§. 412. **Zuſatz.** Weil die Linie AC, die ſich um C herum bewegt, ſich immer gleich bleibt, ſo ſind alle Radii eines und eben deſſelben Zirkels einander gleich.

§. 413. **Zuſatz.** Weil AC = CB, ſo iſt AB = 2AC; oder der Diameter der doppelte Radius, und der Radius der halbe Diameter.

§. 414. **Erklär.** Ein **ebener Winkel** iſt die Neigung zwoer geraden Linien in einem Punkt. Z. E. AB und BC in dem Punkt B. *Fig.* 8. Wenn die Neigung ſo beſchaffen iſt, daß ſich die eine Linie auf keine Seite mehr als auf die andere wendet, wie in *Fig.* 7 CD auf AC, ſo iſt der Winkel ein rechter (Rectus) ACD. Und eine Linie, die auf der andern unter dieſer Bedingung ſteht, heißt eine **Perpendikularlinie**, oder **Lothrecht** ſtehende Linie. Ein **ſpitziger** Winkel (acutus) ABC iſt kleiner als ein rechter, *Fig.* 8. und ein **ſtumpfer** Winkel (obtuſus) DEF *Fig.* 9. iſt gröſſer als ein rechter.

§. 415. **Willk. Satz.** Man ſchreibt einen Winkel entweder durch die an die Endpunkte geſetzte Buchſtaben ABC, DEF, ſo, daß der Buchſtabe, der die Neigung anzeigt, in die Mitte kömmt, oder durch einen in die Neignng geſetzten kleinen Buchſtaben, wie *Fig.* 8. 9. die Buchſtaben o, n. Da es heißt, der Winkel n, der Winkel o.

§. 416. **Zuſatz.** Weil *Fig.* 7. auf dem Diameter AB die Linie DC ſo ſtehen kann, daß ſie ſich weder gegen AC noch CB mehr neiget, und eben dieſes durch die Verlängerung in die entgegengeſetzte Seite bewerkſtelliget wird, ſo beſteht ein jeder Zirkel aus vier rechten Winkeln; und weil der vierte Theil von 360°, welche die Peripherie des Zirkels ausmachen, = 90° iſt, ſo hält ein jeder rechter Winkel 90°.

§. 417. **Zuſatz.** Das Maaß eines Winkels iſt alſo ein Zirkelbogen, deſſen Mittelpunkt die Neigung des Winkels iſt, und der zwiſchen den Schenkeln des Winkels, als zween Radien enthalten iſt.

§. 418. **Zuſatz.** Weil alle Zirkel, groſſe wie kleine, einerley Zahl von Graden, nämlich 360° halten, ſo iſt es gleichgültig, ob man mit einer groſſen oder kleinen Eröffnung des Zirkels einen Winkel mißt; die Anzahl der Grade iſt beyderſeits einerley, nur ſind die einzelnen Grade im erſten Falle gröſſer, und im andern kleiner. Denn man begehrt nicht zu wiſſen, wie groß der Bogen ſey, wenn er in eine gerade Linie ausgedehnt würde, ſondern wie viel er Grade halte, oder wie groß die Neigung des Winkels ſey.

§. 419. **Erklär.** Eine **Figur** iſt eine allenthalben begränzte ſtätige Größe; ſie iſt **geradelinigt** und eben (rectilinea,) wenn ihre Gränzen gerade Linien ſind, oder wenn ſie allenthalben von geraden Linien eingeſchloſſen wird. Z. E. **Dreyecke**, die in drey Seiten, **Vierecke**, die in vier, **Vielecke**, die in mehrere Seiten eingeſchloſſen ſind.

§. 420.

§. 420. **Zuſatz.** Zwo gerade Linien ſchlieſſen alſo keine Figur ein, ſondern man muß wenigſtens drey Linien dazu haben, daher das Dreyeck die erſte und ſimpelſte geradelinigte Figur iſt.

§. 421. **Erklär.** Dreyecke kann man nach ihren Winkeln und nach ihren Seiten betrachten. In Rückſicht auf die Seiten giebt es **gleichſeitige**, (æquilatera,) wenn alle drey Seiten gleich ſind, **gleichſchenklichte** (æquicruta, iſoſcelia,) wenn zwo Seiten gleich ſind, und **ungleichſeitige** Dreyecke, (ſcalena) wenn keine Seite der andern gleich iſt. In Rückſicht auf die Winkel giebt es rechtwinklichte (rectangula,) wenn einer von den Winkeln ein rechter iſt, ſtumpfwinklichte (obtuſangula, amblygona) wenn das Dreyeck einen ſtumpfen Winkel enthält, und ſpitzwinklichte (acutangula, oxygona) wenn alle drey Winkel ſpitzig ſind. Das ſind die ſechs Gattungen von Dreyecken. Ein **Viereck** hat vier Seiten und vier Winkel; es heißt ein **Quadrat**, wenn alle vier Seiten und Winkel gleich, folglich rechte Winkel ſind; ein **Rechteck** oder Rectangulum, wenn zwar alle vier Winkel gleich, das iſt, lauter rechte Winkel, hingegen nur zwo gegenüberſtehende Seiten, alſo nicht alle vier Seiten gleich ſind. Eine **Raute** (Rhombus,) wenn alle vier Seiten gleich, die Winkel aber ſchief, und nur zwey gegenüberſtehende gleich ſind; eine **länglichte Raute** (Rhomboides) wenn nur zwo gegenüberſtehende Seiten und zween eben ſo ſtehende Winkel einander gleich ſind. Der allgemeine Name für dieſe Gattungen von Vierecken iſt das Parallelogramm; alle andere Vierecke, die nicht ſo beſchaffen ſind, heißt man Trapezia, oder ungleichſeitige Vierecke (*). Ein **Vieleck** iſt entweder regulär, oder irregu-

(*) Einige Geometer machen hier noch einen Unterſchied, diejenigen ungleichſeitigen Vierecke, in denen zwo Seiten Parallel ſind, nennen ſie Trapezien; die, in welchen keine Seite einer

irregulär; jenes hat lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel, dieſes nicht.

§. 422. **Lehrſatz.** Durch zween Winkel, die zuſammen kleiner als 180°, und durch eine Seite, welche die beyde Winkel einſchlieſſet, wird nur ein einziges Dreyeck beſtimmt. Denn man verlängere (*Fig.* 15.) die Seite IG, welche mit der gegebenen GH einen Winkel IGH macht, ſo wird ſie der gleichfalls verlängerten Seite HL, welche mit HG den Winkel LHG macht, in dem Punkt K begegnen, und das Dreyeck in dieſem einzigen Punkte beſtimmen.

§. 423. **Zuſatz.** Wenn daher in zween Dreyecken zween Winkel mit der eingeſchloſſenen Seite einander gleich ſind, ſo ſind die ganzen Dreyecke gleich und ähnlich, das iſt kongruent, und decken einander; und wenn man hundert von ſolcher Beſchaffenheit hätte, ſo würden ſie alle einander decken.

§. 424. **Anmerk.** Warum die beyde Winkel zuſammen weniger als 180° oder zween rechte Winkel betragen müſſen, wird weiter unten an ſeinem Ort erwieſen werden. Das, was zum gegenwärtigen Lehrſatz gehört, iſt völlig erwieſen, nämlich daß durch zween Winkel, und die eingeſchloſſene Seite ein Dreyeck beſtimmt, und daß folglich alle auf dieſe Weiſe beſtimmte Dreyecke gleich und ähnlich ſeyn.

§. 425. **Lehrſatz.** Durch zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wird nur ein einziges Dreyeck beſtimmt. Denn nach *Fig.* 14. ſind die Seiten DE und EF gegeben, nebſt dem Winkel DEF, den ſie einſchlieſſen; man kann alſo von D nach F keine andere Linie ziehen, als die Linie DF, weil zwiſchen zween Punkten nur eine einzige gerade Linie möglich iſt.

§. 426.

einer andern weder gleich noch parallel iſt, Trapezoiden. Der Unterſchied wurde vielleicht darum gemacht, weil man bey der Berechnung des Flächeninnhalts der erſteren einen kleinen Vortheil hat, der bey der zweyten Art wegfällt.

§. 426. **Zuſatz.** Wenn alſo in zween Dreyecken zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel einander gleich ſind, ſo ſind die ganzen Dreyecke gleich und ähnlich, das iſt kongruent, und decken einander.

§. 427. **Zuſatz.** Zwo Seiten mit einem Winkel überhaupt, der nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, beſtimmen das Dreyeck noch nicht; es wäre dann, daß man ſagte, was es für ein Dreyeck ſey, nämlich rechtwinklicht, ſpitzwinklicht oder ſtumpfwinklicht; welche Vorausſetzungen aber nicht in die erſten und allgemeinen Beſtimmungsgründe der ganzen Geometrie gehören. Denn *Fig.* 10. ſeyn gegeben die zwo Seiten AE und AC, und der Winkel C, der nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, ſo werden ſich durch dieſe drey gegebene Stücke die Dreyecke: AEC und ADC beſtimmen laſſen; denn man ſetze den Fuß des Zirkels in A, und beſchreibe mit der Eröffnung AE den Bogen ED, ſo iſt AE = AD. Folglich werden zwo verſchiedene Dreyecke dadurch beſtimmt, die einander nicht decken. Sagt man aber, das Dreyeck ſoll rechtwinklicht ſeyn, und der rechte Winkel iſt bey AB, ſo wird es das △ BAC, ſoll es ſtumpfwinklicht ſeyn, und die gegebene Winkel und Seiten ſind C, AC, AE, ſo iſt es das △AEC, ſoll es ſpitzwinklicht ſeyn, ſo iſt es das △ACD.

§. 428. **Anmerk.** Man kann aus dieſem Lehrſatz auch zeigen, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichſchenklichten △ gleich ſeyn; wenn man das △ verdoppelt, und beyden hernach eine gemeinſchaftliche Seite läßt; wir werden aber den Beweis unten beſonders vortragen.

§. 429. **Lehrſatz.** Aus drey Seiten, davon je zwo zuſammen gröſſer als die dritte ſeyn müſſen, läßt ſich nur ein einziges Dreyeck beſtimmen. Denn man nehme *Fig.* 13. CD zur Grundlinie an, und lege BC mit dem Punkt C auf D, AB mit dem Punkt B auf C; ſo wird ein Dreyeck beſtimmt, das dem andern vollkommen gleich und ähnlich iſt,

wenn

wenn man AB mit dem Punkt A auf C, und BC mit dem Punkt B auf D leget; weil in dieſem Fall nur die Lage verändert wird; denn wenn man ſie aus Papier ausſchneidet, und ihre Lage ändert; ſo wird man finden, daß ſie einander vollkommen decken. Eben das folgt, wenn man AB oder BC zur Grundlinie macht; man bekömmt allemal kongruente Dreyecke, in welchen blos die Lage etwas verändert iſt.

§. 430. Zuſatz. Wenn in zweyen Dreyecken die drey Seiten einander gleich ſind, ſo ſind die ganzen Dreyecke gleich und ähnlich, oder kongruent.

§. 431. Zuſatz. Wenn zwo Seiten zuſammen nicht gröſſer ſind als die dritte, ſo treffen ſie über der Grundlinie nicht zuſammen, ſondern fallen entweder in die Grundlinie hinein, und machen alſo wieder eine gerade Linie und keine Figur, oder ſie laſſen eine Oeffnung, und geben folglich kein überall begränztes Kontinuum.

§. 432. Zuſatz. Ein gleichſeitiges Dreyeck wird durch eine einzige Linie oder Seite, und ein gleichſchenklichtes durch die Grundlinie und einen Schenkel beſtimmt.

§. 433. Zuſatz. Nach allen dieſen Lehrſätzen ſind die Winkel, die gleichen Seiten, und die Seiten, die gleichen Winkeln entgegen ſtehen, oder opponirt ſind, einander gleich, eine Seite aber iſt demjenigen Winkel opponirt, den ſie ſchließt; ſo iſt *Fig.* 14. DF dem Winkel E opponirt.

§. 434. Anmerk. Die angeführten drey Lehrſätze mit ihrem jedesmaligen erſten Zuſatz ſind allgemeine Beſtimmungsgründe durch die ganze Geometrie, und müſſen daher wohl gefaßt werden. Man könnte den dritten auch aus dem zweyten herleiten, mit Zuziehung der Anmerkung §. 428.; allein da man auch in dieſem Fall eben das Aufeinanderlegen der Seiten und Winkel voraus ſetzt, wie bey unſerm Beweiſe, ſo iſt der gegebene eben ſo deutlich. Man muß bey allen dieſen Beweiſen nur an den Grundſatz denken, daß

Figu-

Figuren, die einander decken, wie z. E. bey zwo gleichen Händen die rechte die linke, und die linke die rechte Hand deckt, vollkommen gleich und ähnlich ſind, und hernach bey dem Beweis im Sinne, oder auch wirklich in der Ausübung mit ausgeſchnittenem Kartenpapier die Figuren aufeinander legen, und ſehen, ob ſie unter den gegebenen Bedingungen einander decken.

§. 435. **Lehrſatz.** Ein jeder Winkel und eine jede gerade Linie läßt ſich in zween gleiche Theile theilen.

I. Satz. *Fig.* 20.	II. Satz. *Fig* 19.
o = n.	AC = CB.
Beweis.	nr. I. Beweis.
CE = CF, EG = FG } per conſtr.	AD = DB, AE = EB } per conſtruct.
CG = CG	DE = DE
△CEG = △CFG §. 430.	△ADE = △DEB. §. 430.
folglich o = n. §. 433.	folglich n = o. §. 433.
	nr. II. n = o, AD = DB } nach nr. I.
	DC = DC
	△ADC = △CDB. §. 426.
	folglich AC = CB. §. 433.

§. 436. **Erläuterung.** Man ſoll *Fig.* 20. den Winkel ECF in 2 gleiche Theile theilen, ſo macht man aus dem Scheitel C mit beliebiger Oeffnung des Zirkels Durchſchnitte in E und in F, daß CE und CF gleich werden; und eben ſolche Durchſchnitte macht man in G, aus den Punkten E und F, daß EG = GF werde; hernach ziehet man die Linie CG; ſo iſt o = n, oder der Winkel C in zween gleiche Theile getheilt, ſeine Hälften ſind o und n. Bey der Theilung der geraden Linie AB, macht man aus A und B Durchſchnitte in D und E mit beliebiger Eröffnung des Zirkels, daß AD = DB, und AE = EB werden; man zieht die Linie DE durch die Punkten D und E,

die

die ſich ſelbſt gleich iſt, ſo werden AC und CB die zwo Hälften der Linie, und in C wird die Linie AB in zween gleiche Theile getheilt ſeyn.

§. 437. Zuſatz. Es erhellet aus §. 435. I. Satz, daß man den halben Winkel wieder halbiren könne u. ſ. w. folglich läßt ſich jeder Winkel in 2, 4, 8, 16, 32 gleiche Theile geometriſch eintheilen. Hingegen die Eintheilung in drey gleiche Theile (Triſectio anguli) gehört ſchon in die höhere Geometrie.

§. 438. Zuſatz. Aus dem Beweis §. 435. II. Satz erhellet, wie man aus einem gegebenen Punkt auf eine gerade Linie einen Perpendikel herabfällen könne; denn der Punkt ſey D, die Linie AB *Fig.* 19. ſo wird DC auf AB perpendikular ſeyn, weil der Winkel ACD = DCB folglich = 90°, wie unten erwieſen werden ſoll.

§. 439. Lehrſatz. In einem gleichſchenklichten Dreyecke ſind die Winkel an der Grundlinie (anguli ad baſin) einander gleich; denn *Fig.* 21. theile man die Grundlinie AE in zween gleiche Theile in D nach §. 435., und ziehe aus dem Punkt D nach der Spitze C die Linie DC, ſo wird ſichs zeigen, daß die Winkel an der Grundlinie o und n gleich ſind.

Satz. o = n.

Beweis.

AC = CE per hypot. weil es ein gleichſchenk. Δ iſt

AD = DE per conſtruct.

DC = DC

ΔACD = ΔDCE. folglich

o = n §. 433.

§. 440. Zuſatz. In einem gleichſeitigen Dreyecke ſind alle drey Winkel einander gleich; denn man kann es in allen

Lagen

Lagen als ein gleichſchenklichtes anſehen, und die dritte gleiche Seite zur Grundlinie machen.

§. 441. **Zuſatz.** Aus dem gegebenen Beweis erhellet, wie man auf eine Linie aus einem gegebenen Punkte D eine Perpendikularlinie aufrichten ſoll, wenn man *Fig.* 21. AD = DE und AC = EC mit dem Zirkel macht, und ſodann die Linie DC zieht, ſo iſt ſie auf DA perpendikular.

Die Verhältniß der Winkel gegen einander, nebſt den daraus flieſſenden Folgen.

§. 442. **Erklär. Nebenwinkel** ſind diejenigen Winkel, die aus einem und eben demſelben Punkte einer gegebenen geraden Linie gezogen werden. *Fig.* 16. ACD, DCB, oder n, m, ſind Nebenwinkel; denn ſie ſind beyde aus dem Punkte C auf die Linie AB gezogen; lat. heiſſen ſie contigui, und wenn es ihrer nur zween ſind, deinceps poſiti. **Vertikalwinkel** ſind, deren Schenkel im Scheitel beyderſeits verlängert einander durchkreuzen, wie *Fig.* 18. die Winkel o und x.

§. 443. **Lehrſatz.** Alle Nebenwinkel auf einer Linie ſind zuſammen zween Rechten, oder 180° gleich.

Satz. *Fig.* 16.

$n + m = 180°$

Bew.

$n = AD$

$m = DB$

$n + m = AD + DB$

$AD + DB = 180°$; $=$ ſemic.

$n + m = 180°$

Satz. *Fig.* 17.

$m + n + o = 180°$

Bew.

$m = DE$

$n = EF$

$o = FG$

$m + n + o = DE + EF + FG$

aber $DE + EF + FG = 180°$

$m + n + o = 180°$

§. 444. **Zuſatz.** Alle aus einem gegebenen Punkte auf einer geraden Linie gezogene Winkel, welche zuſammen 180° halten, ſind Nebenwinkel.

§. 445. **Zuſatz.** Iſt einer von zween Winkeln gegeben, ſo weis man auch den andern; denn es ſey *Fig.* 16. m gegeben, ſo iſt $n = 180^\circ - m$.

§. 446. **Zuſatz.** Wenn auf einer geraden Linie nur zween Nebenwinkel ſind, und wenn beyde einander gleich ſind, ſo iſt einer wie der andere ein rechter; denn es ſey *Fig.* 19. $x = y$. ſo iſt

I.	II.
$x + y = 180^\circ$	$x + y = 180$
$x = y$	$x = y$
$2x = 180$	$2y = 180$
$: 2$	$: 2$
$x = 90 = R.$	$y = 90 =$ Recto.

§. 447. **Zuſatz.** Wenn von zween Nebenwinkeln einer ein rechter, ſo iſt iſt auch der andere ein rechter, iſt aber der eine ſtumpf, ſo iſt der andere ſpitzig, und iſt der eine ſpitzig, ſo iſt der andere ſtumpf.

§. 448. **Zuſatz.** Alle Winkel um einen feſten Punkt herum halten zuſammen 360°, oder 4 rechte Winkel, oder einen ganzen Zirkel. *Fig.* 17. denn $m + n + o + p + C + q = DE + EF + FG + GH + HI + ID =$ Circ. $= 360^\circ = 4 . 90^\circ = 4$. Rectis.

§. 449. **Lehrſatz.** Alle Vertikalwinkel ſind einander gleich. Denn man ziehe aus dem Durchſchnittspunkte bey m *Fig.* 18. mit beliebiger Eröffnung des Zirkels den Theil der Peripherie ABDE, und bemerke neben den zween Vertikalwinkeln noch den Nebenwinkel m, ſo wird der Beweis von ſelbſt ſich geben.

Satz.

Saß. *Fig.* 18.

$o = x$

Bew.

$o + m = 180°$ (§. 443.)

$m + x = 180°$

$o + m = m + x$

$m = m$ ſubtr.

$o = x.$

§. 450. **Zuſaß.** Wenn alſo von zween Vertikalwinkeln einer gegeben iſt, ſo iſt der andere auch gegeben; wenn $o = 30°$, ſo iſt auch $x = 30°$.

§. 451. **Lehrſaß.** In einem jeden geradelinigten Dreyecke ſind zween Winkel zuſammen kleiner als 180°, oder zween rechte Winkel. Man betrachte das $\triangle ABC$ *Fig.* 22. und theile die Seite AC in zween gleiche Theile in E, nach §. 435. Man ziehe die Linie BE, und verlängere ſie nach F, bis $EF = BE$. Man ziehe die Punkte F und C zuſammen, ſo bekömmt man das $\triangle EFC = \triangle ABE$; weil nach der Konſtruktion $AE = EC$, $EB = EF$, und die Vertikalwinkel bey E einander gleich ſind; folglich das $\triangle EFC = \triangle ABE$. Man bezeichne die kleine Winkel s, o, n, m, ſo iſt der Beweis des Lehrſaßes leicht zu finden.

Saß. *Fig.* 22.

$s + o < 180°$

Bew.

$\triangle ABE = \triangle EFC$ per conſtr. folgl. nach §. 433.

$s = n$

$n < n + m$

$s < n + m$ §. 23.

$o = o$ add.

$s + o < n + m + o$

$n + m + o = 180°$ §. 443.

$s + o < 180°$

§. 452. **Zuſatz**. Dieſer Beweis gilt von allen drey Seiten; denn wenn man die Seite AC nach G verlängert, ſo wird ſich der Beweis eben ſo geben, wie er ſich bey der nach D verlängerten Seite BC ergab; alſo ſind allemal zween Winkel in einem Dreyecke zuſammen kleiner als 180°, oder zween Rechte.

§. 453. **Zuſatz**. Zween an die Endpunkte einer Linie geſetzte Winkel können niemal zuſammen ſtoſſen, es ſey denn, daß ſie kleiner als zween Rechte ſind; in welchem Falle ſie allein konvergiren; ſind ſie aber gröſſer, ſo divergiren ſie auf der einen, und ſtoſſen auf der entgegengeſetzten untern Gegend der Seiten zuſammen, wenn man ſie unterwärts verlängert.

§. 454. **Zuſatz**. Man begreift hieraus zugleich, daß in einem geradelinigten Dreyecke nicht mehr als ein rechter, und nicht mehr als ein ſtumpfer Winkel ſeyn könne, wir werden aber davon unten noch beſonders reden.

§. 455. **Erklär**. Parallellinien ſind, welche, wenn man ſie auf beyden Seiten ohne Ende verlängert, niemal zuſammen ſtoſſen. Dergleichen ſind *Fig*. 23. AB, CD.

§. 456. **Lehrſatz**. Wenn *Fig*. 23. zwo Linien AB, CD durch eine dritte EF ſo durchſchnitten werden, daß

I. die beyde innern Winkel n+y zuſammen 180°,

II. die Wechſelswinkel x und y einander gleich,

III. der äuſſere Winkel o dem entgegengeſetzten innern y gleich iſt, ſo ſind die Linien parallel.

1. Satz. *Fig*. 23.

Wenn $n + y = 180°$, ſo iſt AB, CD parallel.

Beweis.

Wenn $n + y = 180°$, ſo kann AB, CD gegen B und D nie zuſammen ſtoſſen; folglich ſind ſie parallel. Denn wenn

AB,

AB, CD konvergiren, ſo iſt $n + y < 180°$; aber $n + y$ iſt nicht kleiner als 180°; folglich konvergiren ſie nicht, und ſind alſo parallel. Eben ſo beweiſet man auch, daß ſie nicht divergiren können.

II. Satz.

Wenn $x = y$, ſo iſt
AB, CD parallel.
Bew.
$x + n = 180°$ nach §. 443.
$x = y$ per hypoth.

$y + n = 180°$
Eben ſo $x + m = 180°$ folgl.

AB, CD parallel.

III. Satz.

Wenn $o = y$, ſo iſt
AB, CD parallel.
Bew.
$o + n = 180°$.
$o = y$ per hyp.

$y + n = 180°$ und
$y + m = 180°$ alſo

AB, CD parallel.

§. 457. **Lehrſatz**. Wenn zwo Linien AB, CD parallel, *Fig.* 23. ſo machen

I. die beyde innern Winkel $n + y = 180°$.

II. Die Wechſelwinkel x und y ſind einander gleich;

III. Der äuſſere Winkel o iſt dem entgegengeſetzten innern gleich.

Dieſe drey Sätze ſind die obigen umgekehrt, und flieſſen nach den Regeln der Konverſion daraus; der vorhergehende Lehrſatz iſt unmittelbar und directe aus den erſten Gründen der Geometrie in aller mathematiſchen Schärfe; der zweyte iſt Propoſitio prior converſa, und läßt ſich noch auf verſchiedene andere Methoden erweiſen, wie wir in der Anmerkung zeigen.

§. 458. **Anmerk.** Der gegebene Beweis iſt der Euklideiſche, mit einer kleinen Veränderung, um die Sache deutlicher zu machen. Herr von Wolf hat den Euklideiſchen verlaſſen, und folgenden *Fig.* 25. gegeben. Man fälle auf die Linie DE aus dem Punkt des Durchſchnitts H den Perpendikel HE, und auf die Linie CH aus dem Punkte D den Perpendikel DC; ſo ſind die Dreyecke DCH und DEH einander gleich, weil DH = DH. DC = HE,

 und

und die Winkel C und E rechte Winkel ſind. §. 427. folgl. x=y. Allein dieſer Beweis ſetzt voraus, daß DC=HE; die Sache iſt wahr, aber die Erklärung des Euklides von Parallellinien ſagt nur, daß ſie nie zuſammen ſtoſſen; nicht aber, daß alle Perpendikularlinien zwiſchen zwo Parallelen gleich ſeyn, welches erſt eine Folge aus dem Beweis iſt. Giebt man von Parallelen die Erklärung, daß ſie ſolche Linien ſeyn, die auf einer gegebenen CD perpendikular ſtehen, ſo hat der Beweis ſeine Richtigkeit. Euklides aber wollte dieſe Definition nicht geben, ſondern lieber aus der ſeinigen erſt folgern. Man ſehe, was Herr Prof. Käſtner theils in der Vorrede zum I. Th. ſeiner mathematiſchen Anfangsgründe aus Gelegenheit der Einwendung Hrn. Corte, theils in der Ausführung S. 181. folgg. davon weiter meldet. Ich habe in dieſer neuen Ausgabe auch ſelbſt meinen vorherigen Beweis in etwas verändert; bey der Wolfiſchen Definition fließt der Beweis auch ganz richtig aus mathematiſchen Gründen in aller Schärfe. Herr Ge. Simon Klügel, der nunmehr Profeſſor in Marpurg iſt, hat auf Anrathen des Herrn Hofrath Käſtners die gelehrte Geſchichte dieſes Satzes abgefaßt, und in einer Diſp. 1764. wo er 28erley Verſuche anführt, ihn zu beweiſen, deutlich auseinander geſetzt. Sonſt kann man den Satz auch mechaniſch beweiſen, wenn die Linie CD ſich immer parallel nach AB bewegt.

§. 459. Zuſatz. Die Linie CD *Fig.* 25. ſchneide eine von zwo Parallelen unter dem rechten Winkel C, ſo wird auch der andere CDE ein rechter Winkel ſeyn; denn C + CDE = 180° nach §. 456.; C = 90°, nach der Vorausſetzung, dieſes ſubtrahirt, läßt CDE = 90°; eben das gilt von dem Perpendikel HE.

§. 460. Zuſatz. Wenn CH = DE, CD = HE, ſo iſt, weil auch vorhin DH = DH, △CHD = △DHC, folglich x = y und s = r, daher CH mit DE, und CD mit HE parallel, das iſt, wenn in einem Viereck je zwo einander gegenüber ſtehende Seiten gleich ſind, ſo ſind ſie auch parallel.

§. 461. Zuſatz. Und umgekehrt, wenn je zwo gegen einander über ſtehende Seiten parallel ſind, ſo ſind ſie einander auch gleich, das iſt, Parallelen zwiſchen Parallelen ſind

gleich.

gleich. Denn es ſey CH parallel DE, CD parallel HE, ſo iſt x = y und r = s nach §. 457. folglich ΔCDH = ΔDHE nach §. 422. und alſo CD = HE, CH = DE.

§. 462. **Zuſatz.** Wenn in einem Parallelogramm ein rechter Winkel iſt, ſo ſind alle vier rechte Winkel; es ſey (*Fig.* 30.) $o = 90$, ſo iſt $n = 90$, $m = 90$, $r = 90°$; denn

I. $o + n = 180°$ nach §. 456.
$o = 90°$ per hypoth. ſubtrahirt

$n = 90°$.

II. $n + m = 180°$
$n = 90°$ nr. I. ſubtr.

$m = 90°$

III. $m + r = 180°$
$m = 90°$ nr. II.

$r = 90°$.

§. 463. **Zuſatz.** Sind drey oder mehrere Parallelen gezogen, wie *Fig.* 24. ſo wird die ſie ſchneidende Linie bey den Durchſchnittspunkten gleiche Wechſelswinkel, und den äuſſern den entgegengeſetzten innern auch gleich machen, wie aus dem Beweis §. 456. von ſelbſt erhellet, wie dann auch je zween und zween innere jedesmal zuſammen 180° halten werden.

§. 464. **Lehrſatz.** Alle Winkel in einem geradelinigten Dreyecke, machen zuſammen 180° oder zween rechte Winkel aus. Denn man ziehe mit der Grundlinie DE des Dreyecks, DEC *Fig.* 26. die Parallellinie AC durch den Scheitel C, und bezeichne die Winkel n, o, m, r, s, ſo wird ſich der Beweis von ſelbſt geben.

Satz. *Fig.* 26.
$r + o + s = 180°$.

Beweis.
$n = r$ nach §. 456.
$o = o$
$m = s$ nach §. 456. Man addire beyde Reihen zuſammen, ſo iſt

 $n + o$

$$n + o + m = r + o + s \quad \text{aber}$$
$$\underline{n + o + m = 180^\circ} \quad \text{nach §. 443. folgl.}$$
$$r + o + s = 180^\circ.$$

§. 465. **Zuſatz.** In einem geradelinigten Dreyecke kann alſo nicht mehr als ein rechter, und vielweniger mehr als ein ſtumpfer Winkel ſeyn, die übrigen zween müſſen ſpitzig ſeyn; weil ſonſt ihre Summe mehr als 180° betragen würde.

§. 466. **Zuſatz.** In einem gleichſeitigen Dreyecke, wo alle drey Winkel einander gleich ſind, hält ein jeder Winkel 60°, weil $60 = \frac{180}{3}$.

§. 467. **Zuſatz.** In einem rechtwinklichten gleichſchenklichten Dreyecke iſt der Winkel an der Grundlinie = 45°. Denn der rechte Winkel hält 90°, folglich die andern beyde auch 90°; und weil ſie einander gleich ſind, jeder 45°.

§. 468. **Zuſatz.** Wenn in einem ungleichſeitigen Dreyecke zween Winkel gegeben ſind, ſo iſt auch der dritte gegeben; er iſt nämlich 180°, weniger die zween gegebene; denn weil alle drey 180° halten, ſo darf man nur die zween gegebene von 180° abziehen, ſo bleibt der dritte übrig.

§. 469. **Zuſatz.** In einem gleichſchenklichten Dreyecke ſind alle drey Winkel gegeben, wenn nur einer gegeben iſt. Denn entweder iſt einer von den gleichen Winkeln an der Grundlinie gegeben oder nicht: iſt jenes, ſo darf man ihn nur verdoppeln, und von 180° abziehen, ſo hat man deu dritten; iſt aber dieſer gegeben, ſo darf man ihn von 180° abziehen, und den Reſt halbiren, ſo hat man das Maaß der zweyen übrigen.

§. 470. **Lehrſatz.** Der äuſſere Winkel an einem Dreyecke iſt den beyden entgegengeſetzten innern gleich. (Angulus externus æquatur duobus oppoſitis internis). Denn man

ver-

verlängere *Fig.* 27. 28. die Seiten CA nach B, und bezeichne die Winkel o, n, x, y, ſo iſt der Beweis von ſelbſt zu machen; der äuſſere Winkel iſt nämlich o, die beyden entgegengeſetzten innern x und y.

Satz. *Fig.* 27. 28.

$o = x + y.$

Beweis.

$o + n = 180°$ nach §. 443.

$n + x + y = 180$ nach §. 464.

$o + n = n + x + y$

$n = n$ ſubtr.

$o = x + y.$

§. 471. **Zuſatz.** Wenn der äußere Winkel gegeben iſt, ſo ſind die zween entgegengeſetzten innern zuſammen und auch der dritte, als der Nebenwinkel vom äuſſern Winkel gegeben.

§. 472. **Zuſatz.** In einem gleichſchenklichten Dreyecke iſt der äuſſere Winkel zweymal ſo groß als einer von den entgegengeſetzten innern, wenn die innern die Winkel an der Grundlinie ſind; und der Winkel an der Grundlinie iſt die Hälfte von dem äuſſern Winkel.

§. 473. **Lehrſatz.** Der Winkel zwiſchen zwo Parallellinien iſt die Summe der Winkel, den ſeine Schenkel mit den Parallellinien machen. *Fig.* 29. Der Winkel ſey FEG, man verlängere FE bis H, und bezeichne die Winkel n, x, y, r; ſo iſt die Folge richtig.

Satz. *Fig.* 29.

$n = x + y.$

Beweis.

$n = y + r$ nach §. 470.

$r = x$ nach §. 457. Man ſubſtituire;

ſo iſt $n = y + x.$

§. 474. **Anmerk.** Dieſen Lehrſatz braucht man in der Aſtronomie, wenn man die Parallaxe der Sterne genauer berechnen will; er verdient daher wohl, in der Geometrie vorgetragen zu werden, worinn er bisher wenigſtens in den gewöhnlichen Lehrbüchern noch nicht erſchienen iſt.

§. 475. **Erklär.** Der **Winkel an dem Mittelpunkt** (angulus ad Centrum) iſt derjenige, deſſen Spitze an den Mittelpunkt und deſſen beyde Schenkel an die Peripherie des Zirkels ſtoſſen, wie *Fig.* 31. der Winkel ACB, oder o; hingegen der **Winkel an der Peripherie** (angulus ad Peripheriam) deſſen Spitze ſowohl als die beyden Schenkel an die Peripherie hinſtoſſen, *Fig.* 31. der Winkel ADB oder x.

§. 476. **Zuſatz.** Der Winkel an dem Mittelpunkt hat zu ſeinem Maaß den Bogen, auf dem er ſteht. Denn weil AC = CB, ſo iſt AB das Maaß des Winkels o nach §. 417.

§. 477. **Lehrſatz.** Der Winkel an dem Mittelpunkt iſt zweymal ſo groß als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einerley Bogen ſteht. Wo es nach *Fig.* 31. 32. 33. drey Fälle giebt, in welchen die Lage dieſer Winkel gegen einander betrachtet werden kann (*).

I. Fall. Satz. *Fig.* 31.	II. Fall. Satz. *Fig.* 32.
$o = 2x$.	$o + m = 2x + 2n$.
Bew.	Bew.
Man ziehe DB;	Man ziehe DE
$o = x + y$ nach §. 470.	$o = 2x$ } nach nr. I.
$x = y$ §. 439.	$m = 2n$ }
$o = 2x$ und	$o + m = 2x + 2n$ oder
$\frac{1}{2}o = x$.	$\frac{o+m}{2} = x + n$.
	III.

(*) Nämlich: I. Wenn ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht; II. Wenn der Mittelpunkt zwiſchen den Schenkeln liegt; III. Wenn beyde Schenkel auſſer dem Mittelpunkt liegen.

III. Fall. Saß. *Fig.* 33.

$o = 2x.$

Bew.

Man ziehe DF

$p + o = 2r + 2x$ nach nr. II.

$p = 2r$ ſubtr.

$o = 2x.$ oder

$\frac{1}{2}o = x.$

§. 478. **Zuſaß.** Der Winkel an der Peripherie hat zu ſeinem Maaß den halben Bogen, auf dem er ſteht. Denn (*Fig.* 31.) $x = \frac{1}{2}o$; $\frac{1}{2}o = \frac{1}{2}AB$, folgl. $x = \frac{1}{2}AB$.

§. 479. **Zuſaß.** Alle Winkel an der Peripherie, die auf einem und eben demſelben Bogen ſtehen, ſind einander gleich; denn nach *Fig.* 34. iſt

$D = \frac{1}{2}AB$
$E = \frac{1}{2}AB$ nach §. 478.
$F = \frac{1}{2}AB$
$G = \frac{1}{2}AB$. folglich

$D = E = F = G.$

§. 480. **Zuſaß.** Alle Winkel an der Peripherie, die auf dem Diameter, das iſt, auf einem halben Zirkel ſtehen, ſind rechte Winkel, und ein jeder hält 90°; denn *Fig.* 35. iſt nach dem vorhergehenden §. der Winkel $ADB = AEB = AFB = \frac{1}{2}AB$; aber $\frac{1}{2}AB = 90°$ oder ein rechter Winkel; folglich $ADB = AEB = AFB = 90°$. Dieſe Eigenſchaft des Zirkels muß man ſich wohl bekannt machen, indem man ſich im Folgenden mehrmalen darauf berufen wird.

§. 481. **Zuſaß.** Der über die Peripherie verlängerte Winkel x nach *Fig.* 36. hat zu ſeinem Maaß die halbe Differenz der zween Zirkelbogen AB und DF, die ſeine verlängerte Schenkel EA und EB ſchneiden.

Denn

Denn $o = x + y$ nach §. 470.
$\quad y = \quad y$ ſubtr.

$o - y = x$; da nun $o = \frac{1}{2}AB$ und nach §. 478.
$y = \frac{1}{2}DF$

ſo iſt, wenn man dieſe Werthe
ſubſtituirt $o - y = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DF$

folglich $x = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}DF = \frac{AB - DF}{2}$.

§. 482. **Zuſatz.** Man kann an dem Ende einer Linie nach §. 480. leicht einen Perpendikel aufrichten, auch einen jeden Winkelhacken oder rechten Winkel nach eben demſelbigen Zuſatz probieren oder prüfen, ob er richtig ſey.

Die Verwandlung der Figuren.

§. 483. **Erklär.** Eine **Diagonallinie** iſt eine Linie, die von einer Ecke der gegebenen Figur zu einer andern gezogen wird, wie *Fig.* 37. die Linie BD.

§. 484. **Zuſatz.** Das Viereck iſt alſo die erſte Figur, in welcher eine Diagonallinie möglich iſt.

§. 485. **Lehrſatz.** Eine Diagonallinie theilet ein jedes Parallelogramm in zween gleiche Theile.

Satz. *Fig.* 37.
$\triangle ABD = \triangle BCD$.

Beweis.
$AB = CD$ } nach §. 421. weil es ein Parallelo-
$AD = BC$ } gramm iſt, nach der Vorausſetzung.
$BD = BD$

folglich $\triangle ABD = \triangle BCD$. nach §. 429.

§. 486.

Digitized by Google

§. 486. **Zuſatz.** Demnach werden alle Quadrate, Rektangula oblonga, Rhombi und Rhomboides durch die Diagonalen in zween gleiche Dreyecke getheilt; die Trapezia ſind unter den Vierecken allein ausgenommen, weil ſie nach der Erklärung davon keine Parallelogramme ſind.

§. 487. **Lehrſatz.** Ein jedes Rektangulum kann in ein Quadrat und ein jedes Quadrat in ein Rektangulum verwandelt werden. Denn *Fig.* 38. verlängere man von dem gegebenen □FIDE die Seite DE, bis DC der Höhe des Rektangulums gleich iſt, in welches man es verwandeln will; man ziehe von C durch I die Linie CG, welche die verlängerte FE in G ſchneiden wird; man mache das Dreyeck AGC dem Dreyecke EGC gleich; ſo wird ABIH = IDEF.

Satz. □IDEF = □ABIH. *Fig.* 38.

Beweis.

ΔEGC = ΔAGC.

ΔGIF = ΔGHI Nach §. 483. dieſes ſubtr.

läßt ΔEGC — ΔGIF = ΔAGC — ΔGHI; das iſt in der Figur

FICE = ACIH Weil ferner

ΔDIC = ΔBCI §. 483. dieſes ſubtr.

FICE — ΔDIC=ACIH—ΔBCI; das iſt in der Figur

□FIDE = □ABIH.

§. 488. **Zuſatz.** Eben ſo erhellet, daß Rhombus ſich in ein Rhomboides, Rektangula und Rhomboides in andere gleichen Inhalts verwandeln laſſen.

§. 489. **Zuſatz.** Wenn alſo in einem Parallelogramme die Diagonallinie gezogen, und in ſelbiger nach Belieben ein Punkt, wie *Fig.* 38. angenommen wird, durch welchen man mit den Seiten des Parallelogramms die Parallellinien HD, und BF zieht, ſo entſtehen vier Parallelogramme, von welchen

chen die zwey, durch welche die Diagonallinie nicht geht, einander gleich ſind.

§. 490. **Erklär.** Wie man die Grundlinie eines Dreyeckes die Seite nennt, mit der es auf dem Horizont ſtehend vorgeſtellt wird, ſo iſt ſeine Höhe eine Linie, die von der Spitze auf den Horizont aber perpendikular herabgezogen wird, daher wenn es ſchief iſt, die Grundlinie verlängert werden muß. Wie *Fig.* 41. EH, *Fig.* 45. BE, die Höhen ſind; übrigens iſt es gleichgültig, welche Seite man zur Grundlinie annimmt.

§. 491. **Lehrſatz.** Ein jedes ſchiefwinklichtes Parallelogramm läßt ſich in ein ihm gleiches rechtwinklichtes von einerley Grundlinie und Höhe verwandeln, oder zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie und Höhe haben, ſind einander gleich. Denn *Fig.* 39. ſtehen die zwey Parallelogramme ABCD und ABFE, jenes rechtwinklicht, dieſes ſchief, beyde auf einer Grundlinie, und ſind von einerley Höhe, das iſt, zwiſchen zwo Parallelen DF und AB eingeſchloſſen. Man ziehe die Linie CE; ſo wird ſich der Beweis von ſelbſt geben.

Satz. *Fig.* 39.

□ABCD = □ABFE.

Beweis.

AB = DC aus der Definition der Parallelgr.
AB = EF nach §. 421.
folgl.
nr. I. DC = EF
CE = CE addirt
DC + CE = EF + CE d. i. in der Figur
DE = CF.

DE

DE = CF nr. I.
DA = CB }
AE = BF } nach §. 421.
――――― folglich nach §. 429.

nr. II. $\triangle DAE = \triangle CBF$.
$\triangle CGE = \triangle CGE$ ſubtr.
$\triangle DAE - \triangle CGE = \triangle CBF - \triangle CGE$ d. i. in der Figur

DAGC = EGBF. Ferner
$\triangle AGB = \triangle AGB$ addirt, giebt

$DAGC + \triangle AGB = EGBF + \triangle AGB$ d. i. in der Figur
$\square ABCD = \square ABFE$.

§. 492. **Zuſatz.** Auf eine ähnliche Weiſe erhellet, daß nach der *Fig.* 40. ABDF = ACEF; und die Höhe beyder Parallelogrammen iſt CK.

§. 493. **Zuſatz.** Alle Dreyecke, die einerley Grundlinie und Höhe haben, ſind einander gleich; welches aus §. 491. verglichen mit §. 485. deutlich iſt. Denn *Fig.* 41. iſt $\triangle ACB = \triangle ADB$; weil $\square AFCB = \square ADEB$ nach §. 491. Es iſt aber $ACB = \frac{1}{2}AFCB$, und $\triangle ADB = \frac{1}{2}ADEB$; da nun die Ganzen gleich ſind; ſo ſind auch die Hälften gleich, das iſt, das $\triangle ABC = \triangle ADB$. Eben ſo werden alle Dreyecke, ſo viel deren ſind, wenn ſie einerley Grundlinie und Höhe haben, einander gleich ſeyn.

§. 494. **Lehrſatz.** Ein jedes Dreyeck läßt ſich in ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und Seite verwandeln. Denn es ſey *Fig.* 42. das $\triangle BAC$ gegeben, man ſoll es in das Parallelogramm MCHL, deſſen Seite CH und Winkel CHL gegeben iſt, verwandeln. Man theile die Grundlinie BC in E in zween gleiche Theile, und richte

unter

unter dem gegebenen Winkel ECG = CHL das Parallelogramm ECGF auf, man verlängere FG nach I, daß GI der gegebenen Seite gleich werde; man mache den Winkel GIH dem gegebenen CHL gleich, und ziehe durch die Punkte I und C die Linie IK, welche in K die bis dahin verlängerte Linie FE ſchneiden wird; man ziehe endlich durch K eine Parallellinie mit FI, ſo iſt □MCHL = △BAC.

Satz. *Fig.* 42.

△BAC = □MCHL.

Beweis.

△ABC = □ECGF. nach §. 493. weil ABC=$\frac{1}{2}$ABCG und $\frac{1}{2}$ABCG = ECFG, welches letztere aus der Konſtruktion klar iſt.

□ECFG=MCHL nach §. 491. (*)

△ABC = □MCHL.

§. 495. Zuſatz. Weil ein jedes ſchiefes Parallelogramm ſich in ein rechtwinklichtes, und dieſes in ein Quadrat verwandeln läßt, nach §. 487. ſo läßt ſich ein jedes Dreyeck in ein ſchiefes Parallelogramm, aus dieſem in ein Rektangulum, und aus dieſem in ein Quadrat verwandeln; man mag hernach dieſe oder jene Verwandlung bey vorwaltenden Umſtänden nöthig haben.

§. 496. Zuſatz. Iſt der gegebene Winkel CHL, ein rechter, ſo wird das Dreyeck unmittelbar in ein Rektangulum, und aus demſelben in ein Quadrat verwandelt; wenn man wie oben, FEC dem gegebenen rechten Winkel gleich macht.

§. 497.

(*) Denn es iſt die 38te Figur, nur ſchief und unterwärts betrachtet.

§. 497. **Lehrſatz.** Wenn man die Diagonallinie eines Parallelogramms in zween gleiche Theile theilet, *Fig.* 43. und ziehet durch den Theilungspunkt C die Linie DF nach Belieben von einer Parallelſeite zur andern, ſo ſind die Trapezien ADFG und DBEF einander gleich.

Satz. *Fig.* 43.

ADFG = DBEF.

Beweis.

ΔABG = ΔEGB.

nr. I. ΔDCB = ΔFCG nach §. 423. weil GC=CB ex conſtr. die Winkel CGF = CBD, und die Winkel bey C vertikal; folglich

ΔABG—ΔDCB=ΔEGB—ΔFCG, das iſt in der Figur

ADCG = EBCF weil nun wie oben, nr. I.

ΔFCG = ΔDCB ſo iſt, wenn man beyderſ. abd.

ADCG + ΔFCG = EBCF + ΔDCB, das iſt in der Figur

ADFG = DBEF.

§. 498. **Zuſatz.** Ein jedes Parallelogramm läßt ſich durch den Mittelpunkt ſeiner Diagonallinie in ſo viel gleiche Trapezien theilen, als ſich durch dieſen Punkt Linien geben laſſen, das iſt, in unendlich viele.

§. 499. **Lehrſatz.** Alle vier Winkel in einem Trapezium machen, wie in einem jeden Viereck, zuſammen 360° oder einen ganzen Zirkel, oder vier rechte Winkel, welches klar iſt, wenn man *Fig.* 45. die Diagonallinie zieht.

Saß. *Fig.* 45.

$$A + B + C + D = 360°$$

Beweis.

Die Summe der Winkel im $\triangle ABD = 180°$ }
Die Summe der Winkel im $\triangle BCD = 180°$ } nach §. 464.
folgl. add.

Die Summe der Winkel im $\triangle ABD + \triangle BCD = 360°$
Dieſe Summe iſt = der Summe der Winkel $A+B+C+D$;

folgl. die Summe der Winkel in Trapezium,
das iſt $A+B+C+D=360°$.

§. 500. **Zuſaß.** Wenn das Trapezium in einen Zirkel ſich einſchreiben läßt, ſo machen *Fig.* 46. zween einander gegen überſtehende Winkel wie A und C, ferner B und D jedesmal zuſammen 180° oder zween rechte; das iſt, $A + C = 180°$ und $B+D = 180°$; denn $A = \frac{1}{2}BCD$ und $C = \frac{1}{2}BAD$, folglich $A + C = \frac{1}{2}(BCD + DAB,)$ das iſt, wie aus der Figur erhellt, $\frac{1}{2}$. Circ. $= \frac{1}{2}. 360° = 180°$.

§. 501. **Zuſaß.** Eine jede geradlinichte Figur läßt ſich durch die Diagonallinien in Dreyecke, und dieſe Dreyecke laſſen ſich in Quadrate verwandeln nach *Fig.* 63. verglichen mit §. 494.

§. 502. **Erklär.** In einem rechtwinklichten Dreyecke heiſſen die beyden Seiten, die den rechten Winkel einſchlieſſen, die Catheti, und die Seite, die dem rechten Winkel entgegen ſteht, und ihn gleichſam auſſpannet, die Hypothenuſe.

§. 503. **Lehrſaß.** Zwey gegebene Quadrate laſſen ſich in eines verwandeln, das den gegebenen zweyen vollkommen gleich iſt, und eines läßt ſich in zwey verwandeln, die dem gegebenen gleich ſind. Oder das Quadrat der Hypothenuſe iſt den beyden Quadraten der Cathetorum zuſammen

men genommen gleich. Denn man ſetze die Seite AB und BC der zwey gegebenen Quadrate ABHG und BCKI, *Fig.* 51. unter dem rechten Winkel ABC zuſammen, ziehe die Hypothenuſe AC, und richte auf dieſelbe das Quadrat ACDF auf; man ziehe mit CD aus dem Punkte B des rechten Winkels, die Parallellinie BE, und vereinige die Punkte B und F durch die Linie BF, die Punkten G und C durch die Linie GC; ſo wird, wenn man noch die Winkel n, o, m bezeichnet, und die Diagonallinien BG und FL zieht, der Beweis nicht ſchwer ſeyn.

Satz. *Fig.* 51.

§. AB Quadr. + BC Quadr. = AC Quadr. oder weil das Quadrat $AB = AB^2$, u. ſ. w.
$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Beweis.

$n = m$ nach §. 421. ſind rechte Winkel im Quadr.
$o = o$ add.

$n + o = m + o$.
$GA = AB$ } nach §. 421.
$AC = AF$ } folglich

$\triangle AGC = \triangle ABF$ nach §. 426.
$\triangle AGC = \triangle AGB$ nach §. 493. (*)

$\triangle ABF = \triangle AGB$
$\triangle AGB = \frac{1}{2} ABHG$ nach §. 486.

$\triangle ABF = \frac{1}{2} ABHG$
$\triangle ABF = \triangle ALF$ nach §. 493. (**)

$\frac{1}{2} ABHG = \triangle ALF$
$ALF = \frac{1}{2} AFEL$ nach §. 48[illegible]

 $\frac{1}{2}$ABH[illegible]

(*) Denn die gemeinſchäftliche Grundlinie iſt CA, die Höhe AB.

(**) Denn die Grundlinie iſt AF, die Höhe AL.

$\frac{1}{2}ABHG = \frac{1}{2}AFEL$
$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \cdot 2$
$ABHG = AFEL.$

Eben ſo iſt $BCKI = DELC.$ folgl. add.

$ABHG + BCKI = AFEL + DELC$; das iſt in der Figur

AB Quadr. + BC Quadr. = ACDF od. AC Quadr.
oder $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

§. 504. Dieſes iſt der wichtige pythagoriſche Lehrſatz, der ſonſten auch Magiſter Matheſeos heißt; Pythagoras ſoll ihn erfunden, und dafür den Göttern eine Hekatombe geopfert haben; das iſt, nach der gemeinſten Erklärung ein Opfer von hundert Ochſen. Homerus braucht aber dieſes Wort von Opfern, die über hundert ja über tauſend Opferſtücke hielten, und eben keine Ochſen waren, ſondern auch Schaafe, Ziegen u. ſ. w. Es heißt alſo überhaupt, ein groſſes Opfer, welches eher die Zuhörer des Pythagoras als er ſelbſt für dieſe Erfindung geopfert haben mögen; daher man ſich weiter den Kopf mit einigen nicht darüber zerbrechen darf, wie es komme, daß Pythagoras, der ein Thier zu tödten für eine Sünde hielte, in ſo ein groſſes Schlachtopfer einwilligen konnte? Und noch vielweniger ſind diejenigen zu hören, die Hekatombe gerade für ein Ochſenopfer, aber wegen den beſondern Meinungen des Pythagoras für ein unblutiges Ochſenopfer ausgeben, und deßwegen ſagen, er oder ſeine Zuhörer haben künſtliche Ochſen von Teig, oder von Leimen gemacht, und ſolche hernach geopfert. Doch es mag mit dem Opfer ſo oder anders gegangen ſeyn, ſo iſt uns ungleich weniger daran gelegen, als an der Erfindung dieſes wichtigen Lehrſatzes ſelbſt, welcher durch die ganze Mathematik hindurch in alle dahin gehörige Wiſſenſchaften einen ungemein groſſen Einfluß hat. Unſer berühmter Herr Prof. Kies hat im Jahr 1766. einen Beweis aus der Differentialrechnung gegeben, und dadurch, wie er ſelbſt ſchreibt, das zweyte Duzend von Beweiſen dieſes Lehrſatzes, da man ſchon vorher 23 bekannt gemacht, vollends komplirt.

§. 505. Zuſatz. Wenn man von dem Quadrate der Hypothenuſe das Quadrat eines der Kathetorum abzieht, ſo bleibt das andere übrig; oder $AC^2 - AB^2 = BC^2$.

§. 506.

§. 506. **Zuſatz.** Ein jedes Quadrat läßt ſich verdoppeln, oder in ein Quadrat verwandeln, das noch einmal ſo groß iſt. Denn man ziehe *Fig.* 52. die Diagonallinie AC, ſo iſt $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nach §. 503. das iſt $2AB^2$ nach §. 421. oder 2ABCD. Eben ſo läßt ſich auch ein jedes Quadrat halbiren, daß die Hälfte ein Quadrat wird, das noch einmal ſo klein iſt, als das vorige.

§. 507. **Zuſatz.** Drey oder mehrere Quadrate, von verſchiedener Gröſſe, laſſen ſich in eines verwandeln, das den gegebenen zuſammen genommen gleich iſt. Denn es ſeyn die Quadrate *Fig.* 53. AB^2, BC^2, CD^2, DE^2, wo alle gegebene Breiten unter rechten Winkeln zuſammengeſetzt ſind, ſo iſt AE^2 allen dieſen Quadraten zuſammen genommen gleich; weil $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$; und $AE^2 = AD^2 + DE^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$.

§. 508. **Zuſatz.** Eine jede geradlinigte Figur läßt ſich in ein ihr gleiches Quadrat verwandeln; denn ſie läßt ſich durch Diagonallinien in Dreyecke verwandeln; dieſe können in Quadrate verwandelt werden §. 495. die Quadrate zuſammen aber können alle in eines verwandelt werden, nach dem unmittelbar vorhergehenden Zuſatz.

Die Ausmeſſung geradelinigter Figuren.

§. 509. **Erklär.** Eine geradelinigte Figur wird ausgemeſſen, wenn man eine kleinere Fläche in ihr ſo oft herum legt, als ſie ſich herumlegen läßt; die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die kleinere Fläche in der größern herumgelegt werden kann, beſtimmt den Inhalt der größern Fläche (Aream Figuræ). Man wählt zur Ausmeſſung ſolcher Figuren kleine Quadrate, weil ſich alle geradlinigte Figuren in Quadrate verwandeln laſſen. §. 495. Den Inhalt eines ſolchen Quadrats beſtimmt man durch Linien, Zoll, Schuhe, Ruthen, nach dem geometriſchen Maaß, davon was §. 408. geſagt worden.

§. 510. **Lehrſatz.** Ein Rektangulum wird ausgemeſſen, wenn man das zum Maaßſtab angenommene kleine Quadrat ſo vielmal in demſelben herumlegen läßt, als das Produkt der Grundlinie in die Höhe, welche beyde die Seite des kleinen Quadrats mißt, Einheiten in ſich begreift; denn es ſey *Fig.* 44. *a* das groſſe Quadrat ABCD, und das kleine, das im groſſen herumgelegt wird, Abcd; die Höhe AD hält drey Längen wie Ab, die Seite des kleinen Quadrats, und die Grundlinie AB hält fünf ſolche Längen, ſo wird das Quadrat Abcd im groſſen Rektangulum 3 . 5. oder 15, oder AD . AB mal herumgelegt werden können; folglich wird der Jnhalt des Rektangulums ABCD = AB . AD . Abcd, oder in Zahlen 3 . 5 . Abcd ſeyn.

§. 511. **Zuſatz.** Wenn Abcd = 1, ſo iſt der Jnhalt des Rektangulums AB . CD, oder 15. Man muß aber dieſe Einheit immer als eine Quadratfläche anſehen.

§. 512. **Zuſatz.** Die gewöhnliche Art, ſich hier auszudrücken, da man ſagt, das Produkt aus der Höhe und der Grundlinie ſey der Jnhalt des Rechtecks, iſt alſo falſch, wenn Abcd nicht im Sinne als die Einheit der meſſenden Fläche hinzugedacht wird, welche mit dem obigen Produkt multiplizirt erſt die Fläche giebt; denn ſonſt giebt eine Linie mit einer Linie multiplizirt, wieder eine Linie, und niemalen eine Fläche.

§. 513. **Zuſatz.** Wenn die auszumeſſende Fläche ein Quadrat iſt, ſo darf man nur die Grundlinie mit ſich ſelbſt multipliziren, dieſes Produkt in Abcd giebt die Fläche des Quadrats. Das iſt, wenn Abcd = 1, das Quadrat der Grundlinie, oder überhaupt einer Seite, nach den oben gegebenen Beſtimmungen §. 510.

§. 514. **Zuſatz.** Eine Quadratruthe im geometriſchen Maaß iſt 10 Schuh hoch und lang, folglich hält eine Quadratruthe 10 . 10 = 100 Quadratſchuhe, eben ſo, ein Quadrat-

dratſchuh 100 Quadratzolle; und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien; daher die Progreſſion im Flächenmaaß nicht von 10 zu 10, wie bey den Längen, ſondern von 100 zu 100 gehet; z. E. 3456043‴ ſind im Quadratmaaß 3° 45′ 60″ 43‴.

§. 515. Zuſatz. Ein ſchiefes Parallelogramm wird ausgemeſſen, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt, weil ein jedes ſchiefwinklichtes Parallelogramm in ein rechtwinklichtes ſich verwandeln läßt nach §. 487. ein ſolches aber auf die gemeldte Weiſe ausgemeſſen wird §. 510.

§. 516. Zuſatz. Und weil ein jedes Dreyeck die Hälfte eines Parallelogramms iſt, das einerley Grundlinie und Höhe mit dem Dreyecke hat, ſo iſt der Inhalt eines Dreyeckes das halbe Produkt aus der Grundlinie in die Höhe; das iſt nach *Fig.* 45. $\frac{AE.EB}{2}$, oder $\frac{1}{2}$AE.EB. oder $\frac{1}{2}$EB.AE.

§. 517. Zuſatz. Ein Trapezium läßt ſich durch die Diagonallinie in zwey Dreyecke theilen, folglich iſt ſein Inhalt die Summe des Inhalts der zwey Dreyecke, woraus es beſteht.

§. 518. Zuſatz. Wenn ein Trapezium zwo parallele Seiten hat, wie *Fig.* 45. ſo iſt der Inhalt die Summe der zwo parallelen Seiten multiplizirt in ihre halbe Höhe; oder (AD + BC). $\frac{1}{2}$BE. Denn AD. $\frac{1}{2}$BE = △ABD, und BC. $\frac{1}{2}$BE = △BDC, aber ABD + BDC = ABCD, folglich (AD + BC). $\frac{1}{2}$BE = ABCD.

§. 519. Zuſatz. Eine jede vieleckigte Figur, ſie mag regulär oder irregulär ſeyn, läßt ſich durch die Diagonallinien in Dreyecke eintheilen, folglich kann man auf eben dieſe Weiſe ihren Inhalt finden, welcher dem Inhalt aller Dreyecke, aus denen ſie beſteht, gleich ſeyn wird.

§. 520. **Anmerk.** Wir haben hier nur das Nöthigſte, was ans der Lehre von Verwandlung der Figuren unmittelbar fließt, vorgetragen, das weitere gehört in die praktiſche Geometrie, welche im folgenden erläutert werden ſoll, und wo man die hieher gehörige praktiſche Kunſtgriffe nicht vergeſſen wird.

Die Aehnlichkeit der Dreyecke und der Figuren überhaupt.

§. 521. **Erklär.** Aehnliche Figuren ſind, welche in nichts von einander unterſchieden ſind, als bloß in der Gröſſe, oder in welchen alles einerley iſt, ausgenommen die Gröſſe; wie z. E. zween Zirkel; ein groſſer und ein kleiner; wenn dieſes nicht Statt hat, ſo ſind ſie unähnlich.

§. 522. **Lehrſatz.** Zwey Parallelogramme von einerley Höhen verhalten ſich, wie die Grundlinien, wobey aber vorausgeſetzt wird, daß das Verhältniß rational ſey.

Satz. *Fig.* 44. β.

$$ABEF : BCDE = AB : BC.$$

Beweis.

$$ABEF = AB . BE; \text{ und } BCDE = BC . BE;$$

folgl. $ABEF : AB . BE = BCDE : BC.BE.$ Und verſetzt

$$ABEF : BCDE = AB . BE : BC . BE.$$

$$\overline{} : BE$$

$$ABEF : BCDE = AB : BC.$$

§. 523. **Zuſatz.** Wenn die Grundlinien gleich ſind, ſo verhalten ſie ſich wie die Höhen; welches auf eben dieſe Art erwieſen wird.

§. 524. **Zuſatz.** Weil die Dreyecke die Helften ſind von Parallelogrammen, die einerley Grundlinien und Höhe mit ihnen haben, ſo verhalten ſich auch die Dreyecke von einerley Grundlinie, wie ihre Höhen, das iſt *Fig.* 44. β.

ΔABE :

$\triangle ABE : \triangle BCD = AB : BC$, d. i. wenn $EB = CD$ für die Grundlinien angenommen werden, oder wenn ſie einerley Höhe haben, wie ihre Grundlinien.

§. 525. **Zuſatz.** Iſt das Verhältniß nicht rational, oder kann kein Theil von AB, man mag ihn auch noch ſo klein annehmen, ein gemeinſchaftlicher Theil werden, der m und n mal genommen die beyden Linien genau meſſe, ſo nimmt man unendlich kleine Theile an, die man Elemente nennt, damit man auch in ſolchem Falle die Wahrheit der Verhältniß behaupten könne, indem der Fehler alsdann geringer wird als jede angebliche Gröſſe.

§. 526. **Lehrſatz.** Wenn man in einem Dreyecke, wo man will, eine Parallellinie mit der Grundlinie zieht, ſo ſind die durch die Parallellinie abgeſchnittene Stücke der beyden Seiten proportionell.

Satz. *Fig.* 56.

$AD : DB = AE : EC.$

Beweis.

$\triangle ADE : \triangle DEB = AD : DB$ §. 524.
$\triangle DEB = \triangle DEC$ §. 493.(*) Dieſes ſubſt. giebt

$\triangle ADE : \triangle DEC = AD : DB$
$\triangle ADE : \triangle DEC = AE : EC.$ §. 524.

$AD : DB = AE : EC.$

(*) Denn DE wird als ihre gemeinſchaftliche Grundlinie beyder Dreyecke angeſehen; und weil ſie mit ihren Scheiteln C und B zwiſchen den Parallelen BC und DE liegen, ſo haben ſie nach §. 458. auch einerley Höhe.

§. 527. **Lehrſatz.** In den zweyen durch dieſe Parallellinie entſtehenden Dreyecken ſind jede zwo Seiten des einen Dreyeckes den zwo Seiten des andern proportionell.

Satz. *Fig.* 56.

I. Fall.

AD : AE = AB : AC.

Beweis.

AD : DB = AE : EC nach §. 526.
AD : AD + DB = AE : AE + EC. nach nr. III. §. 276.
d. i. in der Fig.
AD : AB = AE : AC. und verſetzt
AD : AE = AB : AC.

II. Fall.

AB : BC = AD : DE.

Beweis.

Wenn man EH mit DA parallel ziehet, ſo iſt BH = DE, nach §. 461. und die Proportion wie vorher; da man nur C für die Spitze und AB für die Grundlinie annimmt: folglich

CB : HB = CA : EA. das iſt, weil HB = DE

CB : DE = CA : EA. ferner
BA : DA = CA : EA. folglich

CB : DE = BA : DA. und verſetzt
CB : BA = DE : DA. oder umgekehrt
AB : BC = AD : DE.

§. 528. **Anmerk.** Man kann den zweyten Fall, wie auch den erſten unmittelbar aus der Euklidiſchen Figur beweiſen; es ſey *Fig.* 60. zu beweiſen, daß CB : AB = CE : DB, ſo iſt der Beweis folgender:

ΔDAB

$\Delta DAB : \Delta CDB = DA : DC$ §. 524.

$\Delta \left\{ \begin{matrix} DBE : \Delta CDE = DA : DC. \\ DAE \end{matrix} \right.$ weil $\Delta DAE = DBE$. §. 492.

$\Delta DAB : \Delta CDB = \Delta DBE : \Delta CDE.$

$DAB + CDB : CDB = DBE + CDE : CDE$; das iſt in der Figur

$\Delta CAB : \Delta CDB = \Delta CDB : \Delta CDR$; nun iſt

$\Delta CAB : \Delta CDB = AB : DB$; alſo

$\Delta CDB : \Delta CDE = AB : DE.$

$\Delta CDB : \Delta CDE = CB : CE$ §. 524. ; folglich

$AB : DE = CB : CR.$ Das iſt verſetzt:

$AB : BC = DE : CE$ und umgekehrt:

$CB : BA = CE : ED.$ Dieſen Beweis habe ich nach dem Euklides in meinen Amœnit. Acad. 1754. und hernach in den erſten Gründen der mathem. Wiſſenſchaften S. 426. folgg. gegeben.

§. 529. **Zuſatz.** Die angeführten Proportionen *Fig.* 56. nämlich I. AD : DB = AE : EC.

II. AD : AE = AB : AC.

III. AD : DE = AB : BC.

geben durch die nach §. 275. verſtatteten Verſetzungen und Veränderungen noch verſchiedene andere Verhältniſſe, die ſich aber alleſamt auf dieſe drey Hauptproportionen gründen.

§. 530. **Zuſatz.** Wo dieſe Proportionen Statt haben, da iſt allemal DE mit BC parallel.

§. 531. **Lehrſatz.** Wenn in zweyen Dreyecken alle drey Winkel einander gleich ſind, ſo ſind die Triangel ähnlich, und die gleichen Winkeln opponirte Seiten proportionell. Denn es ſey *Fig.* 57. in den Dreyecken BAC, CDE, der Winkel ABC = DCE, der Winkel A = D, folglich auch der dritte dem dritten gleich §. 468. ſo wird CD mit BA parallel ſeyn nach §. 457. welches bey allen Dreyecken dieſer Art klar iſt, weil man allemal zwo Seiten, die gleichen Winkeln opponirt ſind, wie BC und CE, in eine gerade Linie zuſammen ſetzen kann. Daß aber in dieſem Falle CD mit BA parallel ſey,

ſey, erhellet daraus, weil nach der Vorausſetzung der Winkel DCE = ABC, und A = D; in welchem Falle alſo CD nothwendig mit AB, und die verlängerte Linie EF mit AC parallel iſt, nach §. 457. folglich wird nach dem vorhergehenden Lehrſatz,

BA : BC = AF : CE;
AF = CD; daher

BA : BC = CD : CE. und eben ſo
BC : AC = CE : DE; folglich auch nach §. 278.

BA : AC = CD : DE.

§. 532. Zuſatz. Sind in zweyen Dreyecken zween Winkel einander gleich, ſo hat die obige Proportion ſchon Statt; denn wenn zween Winkel einander gleich ſind, ſo iſt auch der dritte dem dritten gleich §. 468.

§. 533. Lehrſatz. Wenn ein Winkel, wie AEB *Fig.* 58. durch die Linie DE in zween gleiche Winkel AED, und DEB getheilt wird, ſo verhalten ſich die zwo Seiten des Dreyecks AE, und AB, wie die zween Abſchnitte der dritten Seite, welche durch DE abgeſchnitten werden. Denn man verlängere AE nach C, bis EC = BE, und ziehe die Linie CB; ſo wird der Beweis folgendermaſſen ſich ergeben.

Satz. *Fig.* 58.
AE : EB = AD : DB.
Beweis.
AEB = o + x nach §. 470,
o = x §. 439.

AEB = 2x
AEB = 2AED ex conſtructione

2AED = 2x
: 2
AED = x; folglich
DE parallel BC; daher

AE

$AE : EC = AD : DB$ nach §. 531. aber
$EC = EB$ nach der Konſtruktion, folglich

$AE : EB = AD : DB$.

§. 534. **Zuſatz.** Wenn dieſe Proportion Statt hat, ſo iſt der Winkel AED die Hälfte von AEB.

§. 535. **Lehrſatz.** Eine auf dem Diameter des Zirkels von der Peripherie herabgefällte Perpendikularlinie iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen den Abſchnitten des Diameters, die dadurch beſtimmt werden, oder mit andern Worten: Eine aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuſe gefällte ſenkrechte Linie iſt die mittlere Proportionale zwiſchen den Abſchnitten der Hypothenuſe.

Satz. *Fig.* 59.

$AD : DE = DE : DB$.

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpunkt den Radius CE; ſo iſt $CE^2 = ED^2 + DC^2$, und $CE^2 - DC^2 = ED^2$ nach §. 505.

Man ſetze $CE = r$
$DC = a$
$DE = x$.; ſo iſt

nr. I. $CE^2 - DC^2 = ED^2$ in kleinen Buchſtaben ausgedrückt
$r^2 - a^2 = x^2 = ED^2$.

Es iſt ferner

nr. II. $CB = AC = CE = r$; folglich in der Figur
$AC - CD = AD$, das iſt $r - a = AD$.; und
$CB + CD = DB$ das iſt $r + a = DB$.; alſo iſt

$(r - a) . (r + a) = AD . DB$.

das iſt, nach §. 147. $r^2 - a^2 = AD . DB$
Aber nr I. $r^2 - a^2 = ED . ED$ oder ED^2.

$AD . DB = ED . ED$.; daher
$AD : ED = ED : DB$.

§. 536.

§. 536. **Anmerk.** Eben dieſes Verhältniß läßt ſich auch aus dem obigen Beweis §. 531. herleiten, weil das ΔAED, dem Dreyecke DEB, und beyde dem Dreyecke AEB ähnlich ſind. Denn *Fig.* 59. iſt der Winkel AEB ein rechter, wie ADE, und EDB es auch ſind nach der Vorausſetzung, folglich ſind alle drey gleich; der Winkel B iſt den ΔABE und DBE gemeinſchäftlich; folglich iſt auch der dritte dem dritten gleich, und ΔAEB ∽ ΔDEB ∽ ΔADE; daher AD : DE = DE : DB.

§. 537. **Lehrſatz.** Wenn ein Winkel, wie BCA *Fig.* 62. einen Zirkel durch ſeine zween Schenkel ſchneidet, und mit den verlängerten Schenkeln auf dem Bogen BA ſtehet, ſo verhalten ſich die Segmente der Schenkel auſſer der Peripherie umgekehrt, wie die ganze Schenkel.

Satz. *Fig.* 62.

CE : CD = CA : CB.

Beweis.

$o + x = 180°$ nach §. 443.
$x + y = 180°$ nach §. 500. (*)

$o + x = x + y$
$x = x$ ſubtr.

$o = y.$
$C = C$; folglich; $E = A$ und
ΔCED ∽ ΔCAB. nach §. 532.; daher
CE : CD = CA : CB.

§. 538. **Lehrſatz.** Wenn an dem einen Ende des Diameters eine Perpendikularlinie oder Tangente aufgerichtet wird, welcher eine vom andern Ende des Zirkels gezogene, und den Zirkel ſchneidende Linie, als die Hypothenuſe des Dreyecks, be-

(*) Denn x hat zum Maaß $\frac{1}{2}$EB + $\frac{1}{2}$BA; und y = $\frac{1}{2}$DA + $\frac{1}{2}$ED. Es iſt aber EB + BA + AD + DE = 360°; alſo die Summe ihrer Hälften = $\frac{360}{2}$ = 180°.

begegnet, ſo iſt die Tangente die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Segment der Hypothenuſe auſſer dem Zirkel, und zwiſchen der ganzen Hypothenuſe.

Satz. *Fig.* 61.

$HB . HI = HA^2$

Beweis.

$HI . IB = AI^2$ nach §. 535.

$AI^2 = HA^2 - HI^2$

$HI . IB = HA^2 - HI^2$

$HI^2 = HI^2$

$HI . IB + HI^2 = HA^2$

Das iſt $(HI + IB) . HI = HA^2$

Das iſt in der Fig. $HB . HI = HA^2$

§. 539. **Zuſatz.** Das Quadrat der Tangente iſt alſo dem Produkt der Hypothenuſe in ihr auſſerhalb des Zirkels fallendes Segment gleich, das iſt in der Figur $AH^2 = HB . HI$.

§. 540. **Anmerk.** Dieſe drey Lehrſätze haben in der Trigonometrie und höhern Geometrie ihren Nutzen, und ſind wohl zu merken, unerachtet ſie in den gewöhnlichen geometriſchen Schriften nicht vorkommen.

§. 541. **Zuſatz.** Weil die Seiten, welche in zwey Dreyecken gleichen Winkeln opponirt ſind, ähnlich liegende Seiten (latera homologa) heiſſen, ſo werden die bisherige Lehrſätze kürzlich ſo ausgedrückt, daß man ſagt, in ähnlichen Dreyecken ſeyn die ähnlich liegenden Seiten proportionell.

§. 542. **Zuſatz.** Aus drey gegebenen Seiten kann man nach §. 272. die vierte, und aus zwo, nach §. 274. die mittlere Proportionalſeite finden, wie in der praktiſchen Geome-

Geometrie, wo auch die proportionirliche Theilung der Linien vorkömmt, weiters erläutert werden ſoll.

§. 543. **Lehrſatz.** Aehnliche Dreyecke verhalten ſich, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten (Triangula ſimilia ſunt in ratione duplicata laterum homologorum). Denn es ſeyn die beyden Dreyecke *Fig.* 66. α. β. einander ähnlich; man ziehe ihre Höhen BD, bd, ſo wird man ihren Inhalt durch $\frac{AC.BD}{2}$ und $\frac{ac.bd}{2}$ ausdrücken können; woraus man den Beweis des Lehrſatzes bald finden kann.

Satz. *Fig.* 66. α. β.

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC^2 : ac^2$$

Beweis.

nr. I. $\triangle ABC \backsim \triangle abc$ nach der Vorausſetz.; daher

$$\left.\begin{array}{l} ab : AB = bd : BD \\ ab : AB = ac : AC \end{array}\right\}$$ nach §. 527.; daher

$$ac : AC = bd : BD$$

folglich $\frac{AC \,.\, bd}{ac} = BD$ §. 272.

nr. II. $\triangle ABC : \triangle abc = \frac{BD \cdot AC}{2} : \frac{bd \,.\, ac}{2}$ nach §. 516.

oder dieſes Verhältniß mit 2 multiplizirt

$$= BD \,.\, AC : bd \,.\, ac$$

Es iſt aber nach nr. I.

$BD = \frac{AC.bd}{ac}$ folgl. ſubſtit.

$$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{AC \,.\, AC \,.\, bd}{ac} : bd \,.\, ac$$

. ac

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC.AC.bd : bd.ac.ac$$

: bd

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC.AC : ac.ac = AC^2 : ac^2.$$

§. 544.

§. 544. **Zuſatz.** Aehnliche Figuren verhalten ſich aus gleichem Grunde wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten; denn ſie laſſen ſich in ähnliche Dreyecke durch die Diagonale theilen, folglich gilt von ihnen, was von den Dreyecken geſagt worden. Daher *Fig.* 63. α. β. $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2$.

Denn $\triangle AFB : \triangle afb = AB^2 : ab^2$ §. 543. Weil ferner

$$AFB + FBC + FCE + ECD : afb + fbc + fce + ecd = AFB : afb$$

das iſt $ABCDEF : abcdef = \triangle AFB : \triangle fb$

ſo iſt $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2$.

§. 545. **Zuſatz.** Aehnliche Dreyecke verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Höhen, *Fig.* 66. weil die Höhen auf ähnliche Weiſe beſtimmt werden.

§. 546. **Zuſatz.** Eben das gilt von andern ähnlichen Figuren, wo eine Linie auf eine mit den homologen Seiten ähnliche Weiſe beſtimmt wird; ſo verhalten ſich die Zirkel, weil ſie alle ähnlich ſind, wie die Quadrate der Diameter; wie es im folgenden vom Zirkel beſonders ſoll vorgetragen werden.

§. 547. **Lehrſatz.** Wenn zwo Sehnen eines Zirkels einander ſchneiden, ſo ſind die Produkte ihrer Segmente beyderſeits einander gleich; und die Segmente ſind wechſelweis proportionell.

Satz. *Fig.* 64.

$AG . GB = EG . GD$.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} A = \tfrac{1}{2}BE \\ D = \tfrac{1}{2}BE \end{array}\right\} \text{§. 478.}$$

$A = D$

AGE = DGB ſind Vertikalwinkel, und der dritte dem dritten gleich;

$\triangle AEG \backsim \triangle DBG$; folglich

$AG : EG = GD : GB$ daher

$AG \cdot GB = EG \cdot GD.$

§. 548. Anmerk. Dieſer Lehrſatz iſt beſonders wegen ſeiner Allgemeinheit zu merken; in den gewöhnlichen geometriſchen Lehrbüchern kömmt er ſelten ſo allgemein vor; man findet gemeiniglich nur den beſondern Fall, wenn eine Sehne den Diameter perpendikular ſchneidet, da dann das Produkt der Segmente dem Quadrate der halben Sehne, das iſt, dem Produkt der Segmente der Sehne gleich iſt; wie aus §. 535. unabhängig von dieſem gegenwärtigen Lehrſatz erhellet. Es iſt aber nicht nur dieſer Fall bey dem Diameter, als der größten Sehne, ſondern bey allen Sehnen, und nicht nur, wenn ſie ſich unter einem rechten, ſondern unter allen nur möglichen Winkeln ſchneiden, hier erwieſen. Herr Prof. Sulzer zu Berlin hat den Begriff der Schönheit, in ſofern der Verſtand ſie erkennt und deutlich vorſtellt, aus dieſem Lehrſatz erläutert, und gezeigt, wie das Vergnügen an der Schönheit von dem erſten an bis auf den letzten allgemein erwieſenen Fall zunehme, und ſich auf deutliche Begriffe gründe, da man ſonſten das Schöne mehr in der undeutlichen Vorſtellung einer Sache geſucht hat.

§. 549. Anmerk. Uebrigens empfehlen wir dieſe Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen dem Nachdenken des Leſers um ſo mehr, als ſie, wie wir in der Arithmetik ſchon gemeldet, und wie alle Verſtändige es wiſſen, die Seele der ganzen Mathematik iſt, und in alle Theile derſelben einen ungemein groſſen Einfluß hat.

Von dem Zirkel, deſſen Verwandlung und Ausmeſſung.

§. 550. Lehrſatz. In einem jeden Zirkel ſind die Sehnen gleicher Bögen gleich. Denn man ziehe *Fig.* 48. die Sehnen DE, AB, und die Radios DC, CE, AC, CB, ſo werden die Winkel o und x gleich ſeyn, weil nach der Vorausſetzung die Bögen gleich ſind.

Satz.

Saꝫ. *Fig.* 48.

DE = AB.

Beweis.

DC = CA } ſind Radii.
CE = CB }
o = x nach der Vorausſeꝫung

△DCE = △ACB.
AB = DE.

§. 551. Zuſaꝫ. Wenn die Sehnen gleich ſind, ſo ſind auch die Bögen gleich; denn in dieſem Falle ſind in den beyden Dreyecken *Fig.* 48. alle drey Seiten einander gleich, folglich o = x, daher auch die Bögen, welche dieſe Winkel meſſen.

§. 552. Lehrſaꝫ. Eine Perpendikularlinie, welche eine Sehne in zween gleiche Theile theilet, geht verlängert durch den Mittelpunkt des Zirkels, und theilet ihn in zween gleiche Theile; welches klar wird, wenn man *Fig.* 49. die Sehnen AD, AC, DB, und BC zieht.

Saꝫ. *Fig.* 49.

DC = Diameter.

Beweis.

AGD = DGB } nach der Vorausſeꝫung
AG = GB }
nr. I. GD = GD

△ADG = △DBG nach §. 426. folglich
AD = DB.

Ferner

nr. II. AGC = BGC
AG = GB
GC = GC

ΔACG = ΔBCG. nach §. 426. folglich

AC = BC

Nun iſt

AD = DB nach nr. I.

AC = BC nach nr. II. daher

DA+AC=DB+BC. folgl. auch die Bögen §. 551. deren Summe der ganze Zirkel; daher

DA+AC= ½ Circ.

und DB+BC= ½ Circ. folglich

DC= Diam.

§. 553. Zuſatz. Durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, wird daher allemal ein Zirkel beſtimmt; denn *Fig.* 50. ſeyn die Punkten A, B, D, man ziehe die Linien AB, und BD, zwiſchen dieſen Punkten, man theile ſie in zwey gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte die Perpendikularlinie IF, GH, ſo ſind es zween Diameter nach dem vorhergehenden §. 552. Zween Diameter eines und eben deſſelben Zirkels aber ſchneiden ſich nirgend als im Mittelpunkt, folglich iſt C der Mittelpunkt und CA der Radius.

§. 554. Erklär. Ein Zirkel wird in eine geradelinigte Figur hinein beſchrieben, wenn jede Seite der geradelinigten Figur die Peripherie des Zirkels berührt, und eine Figur wird in einen Zirkel hinein beſchrieben, wenn ein jedes Eck der Figur in der Peripherie des Zirkels ſich endigt.

§. 555. Lehrſatz. In ein jedes Dreyeck läſt ſich ein Zirkel beſchreiben; welches geſchieht, wenn man *Fig.* 47. die Winkel A und D in zween gleiche Theile theilet, und aus dem Punkt C, wo ſie einander durchſchneiden, die Perpendikul CB und CE auf die Seiten des Dreyecks fällt.

Satz.

Saß. *Fig.* 47.

FC, EC, BC, ſind Radii des eingeſchriebenen Zirkels.

Beweis.

nr. I. CED = CBD ſind rechte; ex conſtruct.
x = o ex conſtruct. jeder $\frac{1}{2}$EDB.
CD = CD folglich nach §. 423.

$\triangle$BDE = $\triangle$CDB : daher
CB = CE.

——— Eben ſo iſt

nr. II. AFC = ABC.
n = r
AC = AC

$\triangle$ACF = $\triangle$ACB : folglich
FC = CB. Da nun nach nr. I.
auch CE = CB

——— ſo iſt

FC = CE = CB. alſo drey Radii, und der Mittelpunkt C; aus C kann man alſo durch die drey Punkte B, F, E den Zirkel beſchreiben, der die obige Eigenſchaften hat, daß nämlich der eingeſchriebene Zirkel alle drey Seiten des Dreyecks berührt.

§. 556. Anmerk. Auf eine nicht viel verſchiedene Weiſe wird das Problem περι επαφων, das unter den Alten ſo berühmt war, und von dem Franz Vieta aufgelöſet worden iſt, wie wir in der Geſchichte dieſes Hauptſtückes gemeldet, ohne ſonderliche Mühe blos geometriſch aufgelöſet.

§. 557. Zuſaß. Weil ein reguläres Polygon lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, ſo kann man es ſich als eine in den Zirkel eingeſchriebene Figur vorſtellen, deſſen Seiten die Sehnen des Zirkels ſind.

§. 558. **Zuſatz.** Und weil die Seiten alle, das iſt, im Zirkel, die Sehnen gleich ſind, ſo ſind auch die Winkel am Mittelpunkt alle gleich; das iſt, wenn man eine hat, ſo hat man alle.

§. 559. **Lehrſatz.** Aus der Anzahl der Seiten eines regulären Vielecks wird der Zenterwinkel und der Polygonwinkel, das iſt der Winkel, den zwey Seiten mit einander machen, beſtimmt. Denn wenn die Anzahl der Seiten n iſt, ſo iſt der Zenterwinkel *Fig.* 67. $ACB = \frac{360°}{n}$ und der Polygonwinkel $ABD = 180° - \frac{360°}{n}$. Denn I. alle Winkel um den Punkt C herum machen 360°; es ſind aber n gleiche Winkel um C herum; alſo hält einer $\frac{360}{n}$; folglich iſt der Zenterwinkel $ACB = \frac{360°}{n}$. II. Das Dreyeck ACB iſt gleichſchenklicht, weil AC, CB Radii ſind; folglich ſind die Winkel r und m einander gleich. Weil aber nach der Vorausſetzung $BD = AB$, ſo iſt $\triangle CBD = \triangle CBA$; folglich $o = r$, nun iſt $m + o = ABD$ dem Polygonwinkel; daher wenn man gleiches ſubſtituirt, der Polygonwinkel $= 180° - \frac{360°}{n}$, weil $r + m = 180° - \frac{360°}{n}$ iſt.

§. 560. **Zuſatz.** Wenn die Sehne dem Radius gleich iſt, ſo iſt das Polygon ein reguläres Sechseck, denn alsdann iſt das $\triangle ADB$ gleichſeitig, folglich der Zenterwinkel $= 60°$; aber $\frac{360°}{60°} = 6$; daher ein Sechseck beſchrieben wird, wenn man den Radius ſechsmal in der Peripherie herumträgt.

§. 561. **Zuſatz.** Wenn die Zahl der Seiten gerade iſt, ſo macht die Hälfte der Zenterwinkel 180°, und das Polygon wird durch jeden kontinuirten Radius in zween gleiche Theile getheilt.

§. 562. **Zuſatz.** Man kann die Fläche eines regulären Polygons finden, wenn man die Summe ſeiner Seiten, das iſt n Seiten mit der halben Höhe CH multiplizirt; denn man kann ſich ein Polygon darſtellen, als ob ſein Umfang in eine gerade Linie ausgedehnt wäre, auf welcher als auf der Grundlinie alle *Fig.* 67. mögliche Dreyecke ſtünden; dieſe werden in eines verwandelt, deſſen Inhalt das Produkt aus der Grundlinie in die halbe Höhe iſt. Nach *Fig.* 55.

§. 563. **Lehrſatz.** Weil der Zirkel ein reguläres unendliches Vieleck iſt, ſo kann man ſich ihn eben ſo vorſtellen; und weil die Grundlinien der unendlich kleinen Dreyecke unendlich klein ſind, ſo kann man ihre Höhe für den Radius annehmen; daher ſein Inhalt, die Peripherie in den halben Radius oder vierten Theil des Diameters multiplizirt, iſt.

§. 564. **Anmerk.** Daß dieſer Begriff vom Zirkel möglich, und wie man wirklich den unendlich kleinen Theilen der Peripherie durch die Approximation nahe gekommen ſey, werden wir ſogleich im Folgenden zeigen. Von den Polygonen aber werden wir das Weitere in der ebenen Trigonometrie mit mehrerer Deutlichkeit und deſto kürzer ſagen können.

§. 565. **Lehrſatz.** Ein jedes reguläres oder irreguläres Polygon läßt ſich durch Diagonallinien, die einander nicht durchkreuzen, in ſo viel Dreyecke theilen, als es Seiten hat, weniger zwey. *Fig.* 63. *α*. Denn ſo viel ſich nicht durchkreuzende Diagonalen laſſen ſich ziehen, als es Seiten hat, weniger drey, und dieſe Diagonalen bringen allemal ein Dreyeck wieder heraus, z. E. das Viereck hat eine Diagonale, und dadurch zwey Dreyecke, das Fünfeck zwo Diagonalen, und dadurch drey Dreyecke, das Sechseck drey Diagonalen, und dadurch vier Dreyecke u. ſ. w.

§. 566. **Lehrſatz.** In einem jeden Zirkel kommen die Sehnen ihren zugehörigen Bogen deſto näher, je kleiner ſie ſind. Denn es ſey *Fig.* 54. der Bogen ADB gegeben, ſeine Sehne iſt AB, man theile den Bogen ADB in zween

gleiche Theile in D; ſo iſt die Hälfte des Bogens nun AFD, und die Sehne AD, welche ſchon gröſſer als AE, die Hälfte der vorigen Sehne; theilt man AFD wieder in zween gleiche Theile, ſo wird die Sehne davon abermal gröſſer werden als $\frac{1}{2}$AD; folglich dem Bogen ſelbſt immer näher kommen, je kleiner er wird. Das iſt, der Unterſchied zwiſchen der Sehne und dem Bogen wird durch unendlich viele Halbirungen zuletzt kleiner werden als eine jede angebliche Gröſſe.

§. 567. Zuſatz. Ein jedes reguläres Vieleck, das in den Zirkel eingeſchrieben iſt, läßt ſich verdoppeln, oder in eins verwandeln, das zweymal ſo viel Seiten, und dieß in eines, das viermal ſo viel Seiten hat u. ſ. w. Denn es ſey *Fig.* 54. CA der Radius, der gegeben iſt, AB die Seite des gegebenen Vielecks, ſo iſt AD die Seite des Vielecks, das noch ſo viel Seiten hat; und dieſe Seite läßt ſich aus AB der Seite des vorigen regulären Vielecks und aus AC dem Radius, finden. Denn $AD^2 = AE^2 + ED^2$; welche beyde letztere Quadrate bekannt ſind.

Saß. *Fig.* 54.

$$AD^2 = AC^2 + DE^2 = 1 - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}AB^2)} \text{ wenn } AC = 1.$$

Beweis.

nr. I. $CF = \sqrt{(CA^2 - AE^2)}$; aber
$AE^2 = \frac{1}{4}AB^2$ (*) ſubſtituirt, giebt

$CE = \sqrt{(CA^2 - \tfrac{1}{4}AB^2)}$

nr. II. $DE = CD - CE$
$CD = CA$ ſubſtituirt

$$DE = CA - CE = CA - \sqrt{(CA^2 - \tfrac{1}{4}AB^2)}$$
$$= 1 - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}AB^2)}.$$

§. 568.

(*) Weil AE = $\frac{1}{2}$AB.

§. 568. Zuſatz. Eben ſo läßt ſich aus dem gefundenen AD die Seite des Vielecks, das zweymal ſo viel Seiten als dieſes, oder viermal ſo viel Seiten als das erſte hat, beſtimmen.

§. 569. Zuſatz. Wenn man nun die unendlich kleine Seite des Vielecks dem unendlich kleinen Zirkelbogen gleich ſetzt, ſo wird der Radius die Höhe des unendlich kleinen Dreyecks ſeyn, wie *Fig.* 55. folglich die Summe aller dieſer Dreyecke der Inhalt des Zirkels, woraus man die Peripherie und das Verhältniß des Radius, folglich auch des doppelten Radius, oder des Diameters zur Peripherie findet; welche in allen Zirkeln einerley iſt, weil ſie alle einander ähnlich ſind.

§. 570. Zuſatz. Man wird alſo zuletzt auf ein Vieleck kommen, deſſen Seite kleiner iſt als jede angebliche Gröſſe, und die dem Zirkelbogen ſelber ſo nahe kömmt, als möglich iſt.

§. 571. Anmerk. Auf dieſe Weiſe hat man die Quadratur des Zirkels geſucht, auch durch mancherley Abkürzungen der Rechnungen, wie Hugenius, und vorher ſchon Ludolph von Kölln eine Verhältniß zwiſchen dem Diameter und der Peripherie gefunden, welche, wenn der Diameter = 1, nach der Dezimalrechnung zwiſchen 1:3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50 und zwiſchen 1:3, 141 . . . . 51 hinein fällt. Das iſt, wenn der Diameter 1 mit zwey und dreyßig angehängten Nullen iſt, ſo iſt die Peripherie 3 mit den obigen angehängten 32 Zahlzeichen; die erſten 31 ſind richtig, und ohne Fehler, aber nur noch nicht komplet, weil die Rechnung ohne Ende fortgeht. Folglich kann man nach der Ludolphiſchen Verhältniß alle andere angegebene oder neu erfundene, wenn man welche erfinden würde, prüfen. Wenn ſie unter der Bedingung, daß der Diameter 1 mit 31 Nullen vermehrt iſt, wohin man alle Verhältniſſe reduziren kann, von den 32 Zahlzeichen der Peripherie, wie ſie Ludolph von Kölln gefunden, abweichen, ſo ſind ſie offenbar falſch; ohne daß man nöthig hätte, eine weitere Unterſuchung über die angegebene Verhältniß anzuſtellen. Denn die Ludolphiſche Verhältniß iſt als eine Näherung oder Approximation,

P 5 die

die bey der zwey und dreyßigſten Zahl abgebrochen wird, erwieſen, folglich ein wahrer und wirklicher Theil von der unendlichen Reihe. Da nun dem Wahren nichts Wahres widerſpricht, ſo muß eine jede andere Rechnung, die auf obige Weiſe reduzirt, der Ludolphiſchen widerſpricht, eben deßwegen falſch ſeyn; und auf dieſe Weiſe kann man die vorgegebene Adepten ohne weiteres Diſputiren abweiſen (*).

(*) Wer dieſes Verhältniß auf dieſe Art ſelbſt finden wollte, der müßte um anfangs der Einbildungskraft aufzuhelfen, einen Bogen eines ſehr großen Zirkels nehmen, an dem er den Radius als eine Sehne ſetzt, mithin die Seite eines Sechsecks bekömmt; dieſe Seite wird durch einen Perpendikel aus dem Mittelpunkte ſammt dem Bogen, auf dem ſie ſteht, in zween gleiche Theile getheilet, und die Seite des Zwölfecks aus dem Pythagoriſchen Lehrſatz in Theilen des Radius (deren man z. B. 10000000 nennen kann) gefunden; die Seite des Zwölfecks wird wieder getheilet durch einen Perpendikel aus dem Mittelpunkte, und nach eben der Art die Seite des 24eckes in Theilen des Radius gefunden; man fährt ſo fort, bis man z. B. an das 96 = oder 192 Eck gekommen iſt. Sodann beſchreibt man um den Zirkel ein Hexagon; ſucht zum erſten die Länge des Stückes, welches zum Radius des Zirkels, in dem das innere Polygon beſchrieben iſt, hinzugeſetzt werden muß, damit er dem Radius des Zirkels, in dem das äuſſere Polygon eingeſchloſſen gedacht werden kann, gleich komme; man findet es, wenn man ſagt; wie ſich der Sinus des halben Polygonwinkels zum Radius verhält, ſo verhält ſich der Sinus Verſus zum verlangten Stücke; dieſes zum vorigen Radius addirt, giebt die Seite des äuſſern Hexagons in ſolchen Theilen, als z. B. 10000000, wie oben die Seite des kleinen Hexagons ausmachen; man halbirt dieſe Seite, ſo wie ihre danebenliegende; zieht durch beyde Theilungspunkte die Seite des Zwölfecks; um ſie zu finden, ſucht man wieder zuvor das kleine Stück, das zum Radius des kleinern Zwölfecks zu addiren iſt, woraus ſich dann durch den Pythagoriſchen Lehrſatz die Seite des Zwölfecks ergiebt; ſo fährt man fort bis ans 96 = oder 192 Eck; endlich vergleicht man den Perimeter des innern Polygons, mit dem Perimeter des äuſſern, und ſucht eine mittlere arithmetiſche Proportional zwiſchen beyden nach §. 259., welche der verhältnißmäßigen Größe der Peripherie gegen ihren Radius ziemlich nahe kommen

men wird, wenn man die Rechnung weit genung fortgeſetzt hat.

Obgleich dergleichen Berechnungen, nun da ſie einmal gemacht, und öfters geprüfet worden ſind, eben nicht nothwendiger Weiſe wieder gemacht werden müſſen, ſo ſind ſie doch dem Anfänger anzurathen; ſie ſchärfen den Verſtand, heften die Aufmerkſamkeit auf einen Gegenſtand, und lehren ihn den Fleiß jener Männer verehren, die ſich ſo mühſamen Arbeiten am erſten unterzogen, und für die Bequemlichkeit der übrigen Mathematiker geſorget haben.

Herr Schulze führt im zweyten Bande ſeiner Sammlung Logarithmiſcher ꝛc. Tafeln S. 264. den Werth des halben Umkreiſes eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer = 1 iſt, in 127 Decimalſtellen an, den Lagny berechnet hat. Auch bey Hrn. Lieutenant Vega findet ſich dieſe Annäherung S. 381. ſeiner vortreflichen Logarithmiſchen ꝛc. Tafeln und Formeln.

§. 572. Anmerk. Die Möglichkeit ſowohl als die Unmöglichkeit der beſtimmten Quadratur des Zirkels iſt noch nicht erwieſen: von der unbeſtimmten Quadratur des Zirkels kann man aus der höhern Geometrie zeigen, wie wir unten hören werden, daß ſie was unmögliches ſey; daraus aber läßt ſich der Schluß auf die beſtimmte Quadratur nicht machen. Inzwiſchen, wenn ſie auch möglich iſt, ſo iſt es erſt die Frage, ob das Verhältniß rational oder irrational ſeyn würde. Wäre das letztere, ſo würde man aus dieſer Erfindung nicht das mindeſte weiter wiſſen, als man ſchon weis. Denn ein Irrationalverhältniß erfordert, wie das Ludolphiſche, eine ewige Rechnung. Z. E. Wenn das Verhältniß des Diameters ganz genau wäre, wie $1 : \sqrt{10}$, ſo würde die Quadratwurzel aus 10 eine unendliche Reihe in Dezimalbrüchen geben; welche man, weil wir nicht unendlich fortrechnen können, einmal abbrechen müßte. Und allem Vermuthen nach iſt dieſes Verhältniß irrational; wir ſagen vermuthlich, denn daß ſie wirklich irrational ſeyn müſſe, iſt noch nicht völlig erwieſen, obſchon einige, wie Sturm Math. Enucl. L. I. §. 2. Prop. 43. es bewieſen zu haben, glauben. Wäre aber, gegen alle Wahrſcheinlichkeit, das Verhältniß rational, ſo würde der daraus zu hoffende Nutzen im

ge-

gemeinen Leben und in allen Theilen der angewandten Mathematik nicht gröſſer ſeyn, als der, den man von dem Ludolphiſchen Verhältniß hat. Und alles, was man dabey hoffen könnte, wäre dieſes, daß der Beweis, nachdem er etwa ausfallen würde, nebenher zur Erfindung anderer Wahrheiten Anlaß geben könnte, wozu aber in der Mathematik und vorzüglich in der Rechnung des Unendlichen noch weit reichere Erfindungsquellen verborgen liegen.

§. 573. **Anmerk.** Ich wünſchte, daß dieſe Betrachtung manche dunkle Köpfe, denen die Quadratur des Zirkels ſo nahe am Herzen liegt, daß ſie Jahr und Tage blos darüber nachdenken, und bis zum Krankwerden rechnen, von dem groſſen Zeitverluſt bey ihrer mühſamen und unnützen Arbeit überzeugen möchte, um ſo mehr, wenn es oft Leute ſind, welche kaum die vier Rechnungsarten verſtehen, und wie Merkel einen Leibnitz einen xyz Rechner heiſſen, wodurch man die Sache nur verwirre; oder wenn gar der Geiz ihre Rechenkunſt beſeelet, und ſie, ich weis nicht was für groſſe Prämien ſich von der Entdeckung ihres Geheimniſſes verſprechen, welche nirgend als in ihrem finſtern Gehirn exiſtiren; denn groſſe Herren werden eine Erfindung, die im gemeinen Leben keinen weitern Nutzen hat, gewiß nicht ſo verſchwenderiſch belohnen. Sind dieſe Gründe noch nicht hinlänglich, ſolche hochmüthige Adepten von ihrem Eigenſinne abzubringen, ſo kann man noch auſſer Hrn. Prof. Käſtners Warnung Anfangsgr. der Math. I. Th. p. 272. folgg. vorzüglich Hrn. Prof. Krafft Diſſert. de Quadratura Circuli præſertim Merkeliana, und ſeine Geom. ſublim. Sect. III. de Circulo leſen, wo verſchiedene falſche Quadraturen ſolcher Adepten erzählt, und in ihrer Blöſſe dargeſtellt werden. Erſt im Jahre 1766. hat ſich abermal (, gar ein Profeſſor der Mathematik, (denn dem Schulkollegen zu Kalbe kann man es eher verzeihen) einfallen laſſen, einen falſchen und ganz unrichtigen Beweis, der ſchon in der vierten Ziffer von der Ludolphiſchen Rechnung abweicht, drucken zu laſſen, und dem verdienſtvollen Herrn Abbt in Kloſter Berga zu dediziren. Ich konnte es faſt nicht begreifen, daß ein Prof. auf dem acad. *Gymnaſio* zu Stettin Herr Biſchoff ſo was ſchreiben ſollte; doch es gehört unter das Seltene dieſes Jahrhunderts; wie auch eine Rezenſion dieſes Lehrbuchs, worinnen man ebenfalls meine Zweifel gegen dieſe Adepten mißbilligt, vornämlich aber ſeine große Unwiſſenheit in der Mathematik verrathen hat. Es geſchieht nicht eben aus Verachtung, als vielmehr aus Mitleiden und Verſchonen, ſonſt wollte ich den Rezenſenten nennen, der in die ſonſt berühmte Leipziger Zeitung vom Jahr 1765. nr. 70. 71. einen gar zu ſchlechten Artikel dießfalls

hat

hat einrücken laſſen, dadurch er ſich bey vielen Kennern proſtituirt hat. Er wollte auch mathematiſch über einen Mathematiker ſatyriſiren, aber dazu gehört mehr Laune, Verſtand, und mathematiſche Wiſſenſchaft, als er in ſeinem Leben nicht lernen wird. Herrn Käſtner und mich nimmt er zuſammen, und will nicht haben, daß unſere Schriften, ſo lang das Wolfiſche Handbuch exiſtire, geleſen werden: dieſe neue Auflage und der ſchnelle Abgang wird ihn nebſt unſerer groſſen Achtung gegen den Herrn von Wolf widerlegen. Ein anderer in Greifswalde trug eben dieſe Sorge für Herrn Käſtnern meinen beſten Freund, der es noch itzo iſt. Wenn doch dieſe Leute bedächten, daß Neid und Mißgunſt nur eine Seuche der Halbgelehrten iſt! Rechtſchaffene Mathematiker freuen ſich eben ſo, wie rechtſchaffene Theologen, wenn die Wahrheit von vielen gründlich und faßlich gelehret und bekannt gemacht wird; ſie klagen nie, daß ihre Waare liegen bleibe, wenn andere auch die ihrige auslegen. Gute Waaren bleiben niemals verlegen; und meine Schriften verhalten ſich zu den Käſtneriſchen, wie die Wolfiſchen Anfangsgründe zu ſeinen Elementen, dieſe haben immer den Vorzug; Herr Hofrath Käſtner, mein groſſer Freund und Gönner, wird ihm für ſeine überflüſſige Sorgfalt wenig Dank wiſſen. Und eben ſo würde Wolf denken, wenn er noch lebte.

§. 574. **Anmerk.** Im gemeinen Leben, und überhaupt in der praktiſchen Mathematik, braucht man das Ludolphiſche Verhältniß nicht nach allen ausgerechneten Figuren oder Zahlzeichen, insgemein nimmt man die erſten drey an, und ſagt, das Verhältniß des Diameters zum Zirkel ſey wie 100. zu 314; ein Verhältniß, das man auswendig wiſſen muß. Hat man ſehr groſſe Zirkel zu meſſen, ſo nimmt man 4 Zahlen, nämlich 1000 zu 3141, oder 5, wie 10000 : 31415 u. ſ. w. Bey ſehr kleinen Zirkeln iſt das alte ſchon lang bekannte Archimedeiſche Verhältniß, wie 7 zu 22 gut genug: der Geometer hat keine nöthig, ſondern folgt überhaupt dem Verhältniße, wie 1 : P, wo 1 den Diameter und P die Peripherie bedeutet; wie wir ſogleich hören werden.

§. 575. Lehrſatz. Wenn der Diameter eines Zirkels d, oder 2r genannt wird, ſo iſt ſeine Peripherie, $p = d.P$ oder $2r . P$, und ſein Inhalt r^2P; wofern man das Verhältniß des Diameters zur Peripherie in allen Zirkeln durch $1 : P$ ausdrückt. Es ſey p die Peripherie, r der Radius, und der Inhalt oder area circuli a, ſo iſt

Saß.

Saß.

I. $p = 2r . P$

Bew.

$1 : P = 2r : p$ §. 569. folgl.
$2r\,P = 1 . p$ d. i.

$p = 2r . P.$

II. $a = r^2 . P.$

Bew.

$a = 2r . P . \frac{2}{4} r.$ nach §. 569. das iſt

$a = 2r . P . \frac{1}{2} r = \frac{2}{2} r^2 P = r^2 P.$

§. 576. **Zuſaß.** Wenn man $2r = d$ ſeßt, ſo iſt $a = \frac{d^2 P}{4}$, (weil $\frac{2}{4} r = \frac{1}{4} d.$)

§. 577. **Lehrſaß.** Die Peripherien zweyer Zirkel verhalten ſich, wie die Diameter oder Radien, und die Flächen, wie die Quadrate der Diameter, oder der Radien. Denn es ſeyn die Peripherien p, und π, die Diameter 2r und 2ϱ, die Flächen A und α, ſo iſt

I. Saß.

$p : \pi = r : \varrho$

Bew.

$p : \pi = 2rP : 2\varrho P$ §. 575.
$\quad : P$

$p : \pi = 2r : 2\varrho$ und
$\quad : 2$

$p : \pi = r : \varrho$ das iſt, wie die Diameter oder ihre Hälften, die Radii.

II. Saß.

$A : \alpha = r^2 : \varrho^2$

Bew.

$A : \alpha = r^2 P : \varrho^2 P$ §. 575.
$\quad : P$

$A : \alpha = r^2 : \varrho^2$ u. wenn man mit 4 mult.
$\quad . 4$

$A : \alpha = 4r^2 : 4\varrho^2 = D^2 : d^2$ d. i. wie die Quadrate der Diameter oder der Radien.

§. 578. **Anmerk.** Seßt man für 1 : P das Ludolphiſche Verhältniß 100 : 314, ſo bekömmt man $D^2 : A = 100^2 : \frac{314.100}{4}$ $= 10000 : 7850 = 1000 : 785.$ welche Zahl man wegen praktiſchen Aufgaben auch auswendig behalten kann. Aus dieſer Proportion läßt ſich der Inhalt des Zirkels leicht berechnen, ohne daß man vorher die Peripherie ſuchen dörfte.

§. 579.

§. 579. Zuſatz. Weil $a = \frac{d^2P}{4}$ §. 576. ſo iſt $\sqrt{\frac{4a}{P}} = d$, folglich kann man aus dem gegebenen Inhalt den Diameter finden. Und weil $p = 2rP$ ſo iſt $2r = \frac{p}{P}$, folglich kann man aus der Peripherie den Diameter und Radius finden.

§. 580. Zuſatz. Den Inhalt eines Sektors findet man, wenn man den Bogen, der gegeben ſeyn muß, im Längenmaaß ſuchet, welches aus der gefundenen Peripherie ſich leicht finden läßt; der Bogen ſey z. E. 34°, ſo ſagt man, wenn p gefunden, 360° : 34° = p : p . $\frac{34}{360}$, welches der in eine gerade Linie verwandelte Bogen ſeyn wird, dieſen multiplizirt man mit dem halben Radius, ſo hat man den Inhalt des Ausſchnitts oder Sektors.

§. 581. Zuſatz. Weil das Quadrat des Diameters noch einmal ſo groß iſt, als das Quadrat einer Seite des auf ihm aufgerichteten gleichſchenklichten rechtwinklichten Dreyecks, ſo iſt das Quadrat, das um den Zirkel herum beſchrieben wird, nochmal ſo groß als das Quadrat, das in dem Zirkel beſchrieben wird; nach § 503.

§. 582. Lehrſatz. Die Winkel verhalten ſich gegeneinander ordentlich, wie die Bögen, die ſie meſſen und umgekehrt wie die Radien, (anguli ſunt in ratione directa arcuum & inverſa radiorum.) Denn es ſeyn *Fig.* 81. die Winkel GKD, und FKD gegeben, der Radius KG ſey R, und KL ſey r, das allgemeine Verhältniß, das wir oben §. 575. 1 : P. nannten, ſey R : P, das für 1 geſetzt wird, R; ſo iſt die Peripherie des kleinen Zirkels $p = \frac{rP}{R}$. Hieraus wird

Satz.

Satz. *Fig.* 81.

$$GKD : FKL = \frac{GD}{R} : \frac{FL}{r}$$

Beweis.

$$GKD : 360 = GD : P$$
$$360 : FKL = p : FL$$ multiplizirt

$$GKD . 360 : FKL . 360 = p . GD : P . FL$$
$$\overline{\qquad\qquad} : 360$$
$$GKD : FKL = p . GD : P . FL;$$ aber

$$p = \frac{rP}{R}$$ wie oben gezeigt, dieß ſubſtituirt, giebt

$$GKL : FKL = \frac{rP . GD}{R} : P . FL$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : rP$$
$$GKD : FKL = \frac{GD}{R} : \frac{FL}{r}$$

§. 583. **Lehrſatz.** Der Ring zwiſchen zweyen konzentriſchen Zirkeln iſt die Differenz der Quatrate ihrer Radien in P multiplizirt. Wo P des groſſen, p des kleinen Zirkels Peripherie, R und r die Radien ſind.

Satz.

$(R^2 - r^2)P =$ dem eingeſchloſſenen Ring. (Annulo intercepto,)

Beweis.

$A = R^2 P$, $a = r^2 P$ } § 575. wo A, a die areæ der Zirkel ſind. ſubtr.

$$A - a = R^2 P - r^2 P = (R^2 - r^2)P$$
$$A - a = \text{annulo.}$$
$$(R^2 - r^2)P = \text{annulo.}$$

§. 584.

§. 584. **Zuſatz.** Der Abſchnitt des Rings PGDL verhält ſich zum ganzen Ring, wie GD zu 360°.

§. 585. **Lehrſatz.** Das zwiſchen zween Bögen von verſchiedenen Zirkeln, nämlich zwiſchen einem Quadranten und halben Zirkelbogen enthaltene Stück AEBAF *Fig.* 65. läßt ſich völlig quadriren, und iſt dem gleichſchenklichten Dreyeck ABC gleich.

Satz. *Fig.* 65.

AFBEA = △ABC.

Beweis.

Weil $AB^2 = \frac{1}{2}AD^2$, ſo iſt der Zirkel, wovon AEB ein Bogen iſt, nochmalen ſo groß als der Zirkel, wovon AFB ein Bogen iſt; folglich iſt ein Quadrant vom groſſen Zirkel der Hälfte des kleinen Zirkels gleich, und alſo AEBC = AFBA.

AFBA = AEBC
AEBA = AEBA

AFBA — AEBA = AEBC — AEBA Es iſt aber aus der Figur
△ABC = AEBC — AEBA folgl.

AFBA — AEBA = △ABC; aber in der Figur
AFBA — AEBA = AFBEA

AFBEA = △ABC.

§. 586. **Anmerk.** Dieſe Quadratur ſchreibt ſich von dem Hippokrates her, und heißt deßwegen, weil das Zirkelſtück Mondförmig iſt, Lunula Hippocratis; der Erfinder war ein verdorbner oder vielmehr verunglückter Kaufmann, welcher von dem Arzt Hippokrates wohl zu unterſcheiden iſt; er legte ſich als ein unglücklicher Kaufmann auf die Mathematik, und bekam durch dieſe Wiſſenſchaft wo nicht gröſſern Reichthum, doch einen gröſſern Namen, als durch ſeine vorherige Handthierung. Wie er denn unter den griechiſchen Lehrern der Mathematik, die vor Chriſti Geburt berühmt waren,

ſich einen noch währenden Namen, den aber nur die Mathematikverſtändigen wiſſen, erworben hat. Zur Quadratur des Zirkels ſelbſt trägt übrigens dieſe Erfindung nichts bey. Man weis nur den Raum der zwey Zirkelbögen, davon der eine ein Theil eines doppelt ſo groſſen Zirkels iſt, der andere aber eines doppelt ſo kleinen, und von deſſen Raumes Quadratur die Verhältniß der Quadrate der Diameter zum Inhalt ihrer Zirkel der Grund iſt. Wenn man einen Zirkelabſchnitt, wie ADBA *Fig.* 54. quadriren könnte, ſo würde die Quadratur richtiger erfunden werden. Inzwiſchen iſt die beynahe wahre Quadratur eines ſolchen Zirkelabſchnitts aus §. 579. klar; denn man ſucht den Ausſchnitt oder Sektor des Zirkels nach §. 580. zieht das Dreyeck ACB davon ab, ſo hat man das Segmentum circulare oder den Abſchnitt ADBA. Weitere Umſtände hievon gehören in die praktiſche Geometrie. Z. E. Daß unter allen Figuren von gleichem Umfang der Zirkel die gröſte Fläche, und wiederum die regulären eine gröſſere Fläche als die irregulären gleichen Umfangs, und die regulären von mehreren Seiten wieder mehr als die regulären von wenigern Seiten; daher auch aus dieſem Satz der erſte folgt, daß das reguläre unendliche Eck, das iſt der Zirkel, unter allen Figuren gleichen Inhalts die gröſte Fläche haben werde. Folglich können Figuren von einerley Umfang verſchiedene Flächen von verſchiedener Gröſſe haben. Wenn die Dido mit dem aus der Ochſenhaut geſchnittenen Riemen das ihr verſprochene Land im Zirkularumfang umſchloſſen, ſo hat ſie ungleich mehr Raum bekommen, als wenn ſie den Riemen im Quadrat ausgeſpannt hätte; unerachtet beyderſeits der Umfang einer war. Wie dann auch die Fläche einerley bleiben kann, wenn der Umfang gleich unendlich wäre. Denn zwey Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe ſind einander gleich, das eine kann ein Quadratenmäßiger Umfang ſeyn, das andere ein ſchiefes Rhomboides, daß die zwo Parallelen, die es nach der Länge einſchlieſſen, ans Unendliche gränzen. Welches um ſo eher zu merken iſt, als man in der Ausübung hier manche Fehler macht.

Die Lage der Linien gegen die ebene Flächen und der Flächen gegen einander.

§. 587. **Anmerk.** Die ebene Geometrie iſt allen denenjenigen nöthig, die in den ſphäriſchen Wiſſenſchaften und überhaupt in der angewandten Mathematik mit Ueberzeugung was thun wollen. Weil aber zu den Figuren, welche ſie erläutern, nicht nur die

die Perſpektiv, ſondern auch die Mahlerey erfordert wird, wenn ſie deutlich ſeyn ſollen, ſolche aber noch nicht erkläret iſt, ſo haben wir, um nicht vieles undeutlich zu ſagen, nur eine Figur, nämlich die 68. *Fig.* zu dieſem Zweck zeichnen laſſen; werden aber in der Ausführung dennoch der Deutlichkeit durch körperliche oder maſſive Ausdrücke zu Hilfe kommen, auch die von Holz oder Kartenpapier zu ſchneidenden Flächen nennen, wodurch man der Einbildung die Sache eben ſo gut oder noch beſſer eindrücken kann, als durch Zeichnungen; denn es wird der mathematiſchen Schärfe gleichgültig ſeyn, ob der Kupferſtecher, oder der Formſchneider die Figuren zeichnet.

§. 588. **Lehrſatz.** Wenn zween Punkte einer geraden Linie in einer ebenen Fläche liegen, ſo liegt die ganze Linie darinnen, und wenn drey Punkte, die nicht in gerader Linie ſind, in einer und eben derſelben Fläche liegen, ſo liegt die ganze Figur, die durch die drey Punkte beſtimmt wird, z. E. ein Dreyeck, ein Zirkel, in einer ſolchen ebenen Fläche. Der Beweis gründet ſich auf die erſten Begriffe, die wir ſchon erklärt haben, und kann auf einem jeden ebenen Tiſch, wo man ſolche Punkten annimmt, einem handgreiflich gemacht werden; daher dieſer Lehrſatz auch von manchen für einen Grundſatz angenommen wird.

§. 589. **Zuſatz.** Drey Punkte beſtimmen alſo die Lage einer Ebene; und ein jedes Dreyeck liegt in einer Ebene.

§. 590. **Lehrſatz.** Wenn eine gerade Linie auf einer ebenen Fläche, oder nur auf zwo einander durchkreuzenden Linien, auf dem Durchſchnittspunkt, perpendikular ſteht, ſo ſteht ſie auf allen möglichen geraden Linien, die noch weiter durch den Durchſchnittspunkt gezogen werden können, perpendikular. Die Sache iſt ſo natürlich, daß es überflüſſig wäre, einen Beweis zu geben; wenn wir auch die perſpektiviſchen Mahlereyen ſchon wirklich erkläret hätten. Man ſetze eine Stecknadel auf einen ebenen Tiſch perpendikular, und zie-

he durch den Punkt, wo die Nadel aufſteht, in der Ebene ſo viel gerade Linien, als man will, ſo werden überall mit der perpendikularen Stecknadel, die ſich auf keine Seite mehr lenket als auf die andere, nach der Definition der perpendikularen Linien, rechte Winkel gemacht werden; folglich wird ſie auf allen möglichen geraden Linien der Ebene perpendikular ſtehen.

§. 591. **Zuſatz.** Alle auf dieſe Weiſe ſich durchkreuzende Linien, auf welche eine dritte perpendikular ſtehet, ſind daher in einer und eben derſelben Ebene befindlich.

§. 592. **Lehrſatz.** Zwo Linien, die auf einer ebenen Fläche perpendikular ſtehen, ſind parallel. Denn man ziehe von den Endpunkten ſolcher Linien oder Stecknadeln eine gerade Linie in der Ebene, welche Linie verlängert die beyde Perpendikel ſchneidet, ſo werden die dadurch entſtehende zween rechte Winkel, innerhalb der Perpendikularlinien zuſammen 180° machen; weil 2 . 90 = 180°, folglich nach §. 457. beyde Perpendikel parallel ſind.

§. 593. **Zuſatz.** Wenn von ſolchen zwo Parallellinien eine auf der Ebene perpendikular ſteht, ſo wird auch die andere auf der Ebene perpendikular ſtehen.

§. 594. **Zuſatz.** Wenn auf der Ebene in den Endpunkten der beyden Perpendikularen auch Parallelen gezeichnet werden, wie *Fig.* 68. ſo wird die Diagonal des Rektangulums, nämlich AF, nur alsdann perpendikular auf DE ſeyn, wenn die Grundlinie des Parallelogramms FI mit der Parallele KL in I rechte Winkel macht §. 457. Und wenn zwo Parallelen mit einer dritten parallel ſind, ſo ſind ſie unter ſich parallel; wie man augenſcheinlich ſieht, wenn man drey Stecknadeln auf einer Ebene in gerader oder anderer Direktion unter einerley Winkel einſtecket.

§. 595. Zuſatz. Was von den Parallelen und Perpendikularlinien geſagt worden, gilt auch von den Ebenen.

§. 596. Zuſatz. Aus einem gegebenen Punkt über der Ebene kann man nicht mehr als eine Perpendikularlinie auf die Ebene herabfällen, welche zugleich der kürzeſte Weg von dem gegebenen Punkt auf die Ebene herab iſt.

§. 597. Zuſatz. Zwiſchen zwo Ebenen iſt der kürzeſte Weg eine gerade Linie, die auf beyden Ebenen perpendikular ſteht, und die man die Diſtanz der beyden Ebenen nennt.

§. 598. Lehrſatz. Man nehme auf einer Ebene zwo Parallellinien an; man fälle aus einem beliebigen Punkt über der Ebene eine Perperdikularlinie auf die eine der gegebenen Parallellinien, welche zugleich perpendikular auf die ganze ebene Fläche ſey; aus eben dem angenommenen Punkt fälle man einen Perpendikel auf die andere Parallellinie, welche folglich auf die Ebene nicht parallel ſeyn kann nach §. 596.; ſo wird die Linie in der Ebene zwiſchen den Endpunkten der Perpendikel auf beyde Parallelen perpendikular ſeyn. Das iſt *Fig.* 68. die Linie FI; denn es ſey die Ebene BC, oder ein ebener Tiſch, die beyde Parallellinien KL, DE, der Punkt oberhalb der Ebene A, von welchem auf KL der Perpendikel AI herabgefällt wird, der auf die Ebene BC ſelbſt perpendikular iſt; von A werde auf die andere parallele DE, der Perpendikel AF gefällt, der aber nur auf DE und nicht auf die ganze Ebene perpendikular ſtehen kann, von F nach I ziehe man die gerade Linie, ſo macht FI mit DE bey F einen rechten Winkel.

Satz. *Fig.* 68.

$DFI = IFE = 90°$

Beweis.

$DFI + FIK = 180°$ nach §. 457.

$FIK = 90°$

$DFI = 180 - 90° = 90°$. Oder folgendermaſſen:

Wenn AF auf DE perpendikular iſt, ſo werden von allen Punkten zwiſchen A und I auf F Linien gezogen werden können, die auf DE perpendikular ſind; denn der Punkt A kann in die Linie AI angenommen werden, wo er will; wenn er nun dem Punkt I unendlich nahe iſt, indem man ſich vorſtellen kann, die Linie AI ſey im Punkt F an DE befeſtiget, und bewege ſich um die Axe und DE herum, ſo daß die Winkel bey F unverrückt bleiben, ſo fällt er mit I zuſammen, folglich iſt auch IF auf DE perpendikular, das iſt DFI = IFE = 90°.

Oder auch apogogiſch: Wenn FI auf DE nicht perpendikular wäre, ſo müßte eine andere Linie durch F auf DE perpendikular ſeyn; folglich auch ein anderer Perpendikel von A auf dieſe Linie und auf die ganze Ebene ſich fällen laſſen; welches nicht möglich, weil von keinem Punkt auſſer der Ebene zween verſchiedene Perpendikel auf die Ebene ſich fällen laſſen.

§. 599. Anmerk. Wenn man ein hölzernes rechtwinklichtes Dreyeck ſich ſchneiden läßt, und auf einem Tiſch zwo Parallelen in der Diſtanz der Grundlinie zieht, ſo wird man augenſcheinlich ſehen, daß, nur in dem Falle, wenn die Grundlinie des Dreyecks mit einer der gezogenen Parallelen auf der Ebene rechte Winkel macht, die Hypothenuſe mit der andern Parallele einen rechten Winkel macht; ſonſt aber in keinem Falle. Dieſer Lehrſatz iſt beſonders zu merken, weil er im folgenden, vornämlich in der ſphäriſchen Trigonometrie, ſehr brauchbar iſt.

§. 600. Zuſatz. Wenn FI mit IL einen rechten Winkel macht, ſo iſt AF wie FI auf DE perpendikular.

§. 601. Zuſatz. Wenn AI auf der Ebene KL perpendikular ſteht, ſo ſteht die ganze Ebene durch AI darauf. Das ganze hölzerne Dreyeck AFI, oder ein Quadrant, deſſen Radius AI, iſt auf der Ebene KL perpendikular. Denn AI iſt mit allen Linien der Ebene KL durch I perpendikular, folglich auch mit FI, daher FIA = 90°.

§. 602.

§. 602. Zuſatz. Und wenn die Ebene AFI auf KL ſenkrecht oder perpendikular ſteht, ſo iſt auch AI auf KL ſenkrecht, und AI iſt der einzige Perpendikel, der ſich aus A auf KL fällen läßt.

§. 603. Anmerk. Aus den bisherigen Lehren und Zuſätzen wird man die nachfolgenden Erklärungen der Neigungswinkel ſowohl der Linien gegen Ebenen, als der Ebenen gegen einander deſto beſſer faſſen; daher wir dieſe Erklärungen auf den Beſchluß verſparet haben.

§. 604. Erklär. Der Neigungswinkel einer Linie gegen eine Ebene, iſt der Winkel, den die Linie mit einer andern in der Ebene dergeſtalt gezogenen Linie macht, daß ein Perpendikel von einem nach Belieben angenommenen Punkt in der geneigten Linie auf die Linie in der Ebene herab gefällt werden kann, der ſie ſchneidet. So iſt AFI in der 68. *Fig.* der Neigungswinkel der Linie AF mit der Ebene KL, weil die in der Ebene gezogene Linie FI mit AI einen rechten Winkel macht; eine jede andere Linie in KL, die von F aus gegen einer andern Richtung gezogen wird, würde dieſes nicht leiſten, folglich den Neigungswinkel nicht beſtimmen.

§. 605. Erklär. Eben ſo iſt der Neigungswinkel zwoer Ebenen gegen einander der Winkel CDE *Fig.* 83. wenn von einem beliebigen Punkt C der Ebene ACB auf den Durchſchnitt beyder Ebenen AB ein Perpendikel CD gezogen, und eben ſo in der andern Ebene ABC, die Linie ED auf AB perpendikular gezogen wird, daß CD und DE im Punkt D ſich begegnen. Jede andere Linie von D aus gegen eine andere Richtung wird zwar auch einen Winkel, aber nicht den Neigungswinkel der beyden Ebenen gegen einander beſtimmen.

§. 606. **Zuſatz.** Wenn CD nicht nur auf AB ſondern auch DE perpendikular iſt, ſo ſtehen beyde Ebenen auf einander perpendikular.

§. 607. **Zuſatz.** Zwo parallele Ebene ſtoſſen niemals zuſammen, und machen mit einer dritten Ebene, auf der ſie ſtehen, gleiche Neigungswinkel.

§. 608. **Zuſatz.** Zwo einander durchſchneidende Ebenen ſtehen auf einer dritten perpendikular, wenn ihre Durchſchnittslinie auf der dritten perpendikular ſteht; und die Durchſchnittslinie ſteht auf der dritten Ebene ſenkrecht, wenn die beyde ſich durchſchneidende Ebenen auf der dritten ſenkrecht ſtehen; welches aus *Fig.* 68. erhellet, wenn man an das Dreyeck AFI ein Rektangulum nach Belieben hinſetzt, daß die Linie AI beyder Durchſchnittslinie wird; wie man ſolches leicht mit Kartenpapier bewerkſtelligen kann.

§. 609. **Anmerk.** Ueberhaupt werden alle die bisher vorgetragene Sätze erleichtert, und ohne Mühe gefaßt werden, wenn man ſich von Holz oder Kartenpapier die Ebenen unter den angeführten Bedingungen ſchneiden läßt, und ſolche ſo zuſammen fügt, daß die Beweiſe der Lehrſätze auch der Einbildungskraft ſo ſinnlich werden, als die bisherigen, die wir aus den bezeichneten Figuren erläutert haben.

Allgemeine Begriffe geometriſcher Körper, oder Einleitung in die Stereometrie.

§. 610. **Erklär.** Ein Continuum, das zwiſchen zwo ebenen gleichen Grundflächen, und zwiſchen ſo viel Parallelogrammen eingeſchloſſen iſt, als jede Grundfläche Seiten hat, heißt ein **Priſma** *Fig.* 73. 71. Es iſt dreyeckigt, wenn die Grundflächen Dreyecke; **viereckigt**, wenn die Grundflächen Vierecke ſind; ſind dieſe viereckigte Grundflächen Parallelogramme, ſo heißt das Priſma ein **Parallelepipedum**, *Fig.*

Fig. 70. welches **ſchief** iſt, wenn die Seitenflächen ſchief, und **ſenkrecht**, wenn die Seitenflächen ſenkrecht auf der Grundfläche ſtehen; das **ſenkrechte** wird ein **Kubus**, wenn die Seitenflächen alleſammt gleich ſind. *Fig.* 69. Wenn die Grundfläche unendlich viel unendlich kleine Seiten hat, das iſt, wenn ſie ein Zirkel iſt, ſo wird aus dem Priſma ein **Cylinder**. *Fig.* 74.

§. 611. **Erklär.** Eine Pyramide iſt ein Körper, der von einer ebenen Grundfläche, und ſo viel ſich im Scheitel zuſpitzenden Dreyecken begränzet wird, als die Grundfläche Seiten hat. *Fig.* 72. Aus der Pyramide wird ein **Kegel**, (Conus) wenn die Grundfläche ein Zirkel iſt; und der Kegel heißt abgekürzt (conus decurtatus) wenn ſeine Spitze mit einer der Grundfläche parallelen Ebene abgeſchnitten wird. *Fig.* 75.

§. 612. **Erklär.** Eine **Kugel** entſteht, wenn ſich ein halber Zirkel um ſeinen Diameter herum, wie um eine Axe bewegt, bis er wieder in die vorige Lage kömmt. Die krumme Ebene, welche die Kugel begränzt, heißt die Kugelfläche.

§. 613. **Erklär.** Ein körperlicher Winkel (angulus ſolidus) iſt ein Winkel, der von mehr als zwo Linien eingeſchloſſen iſt, und davon niemals mehr als zwo in einer und eben derſelben ebenen Fläche liegen können. So iſt ein jedes Ecke in einem Zimmer ein körperlicher Winkel.

§. 614. **Zuſatz.** Zu einem körperlichen Winkel hat man wenigſtens drey Flächen nöthig.

§. 615. **Zuſatz.** Ein körperlicher Winkel beſteht aus verſchiedenen ebenen Winkeln; die Summe dieſer Winkel, die den körperlichen ausmachen, müſſen allemal weniger als vier rechte Winkel oder 360° halten, ſonſt werden ſie in eine und eben dieſelbe Ebene fallen.

§. 616. **Anmerk.** Man verſteht hier auswärtsgehende Winkel, und keine einwärtsgehende; die Franzoſen nennen dieſe zwo Gattungen von Winkeln angles rentrans und ſaillants.

§. 617. **Erklär.** Reguläre Körper ſind, die in reguläre Vielecke, die lauter gleiche Flächen und gleiche Ecke oder körperliche Winkel haben, eingeſchloſſen ſind.

§. 618. **Zuſatz.** Es giebt alſo nur fünf reguläre Körper, die von den Hedris oder Seiten und der Anzahl der Winkel benennt werden: nämlich 1) das Hexaedrum oder Kubus, den man deutſch den **Würfel** heißt; es iſt in ſechs gleiche Quadrate eingeſchloſſen, und der körperliche Winkel beſteht aus drey rechten oder $3 . 90° = 270°$. 2) Das Tetraedrum iſt in vier gleiche gleichſeitige Dreyecke eingeſchloſſen, der körperliche Winkel, den je drey Dreyecke mit einander machen, iſt $3 . 60° = 180°$. 3) Das Oktaedrum iſt in acht gleiche gleichſeitige Dreyecke eingeſchloſſen, davon je vier Dreyecke zuſammen den körperlichen Winkel machen, der folglich $4 . 60° = 240°$ hält. 4) Das Ikoſaedrum iſt in zwanzig gleiche gleichſeitige Dreyecke eingeſchloſſen, davon je fünf zuſammen den körperlichen Winkel machen, der daher $5 . 60 = 300°$ hält. 5) Das Dodekaedrum iſt in zwölf reguläre gleiche Fünfecke eingeſchloſſen, davon je drey den körperlichen Winkel machen; der folglich, weil der Polygonwinkel im Fünfeck $= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108°$ iſt, nach dieſer Rechnung $3 . 108 = 324°$ hält. Weitere reguläre Körper giebt es nicht; denn ein körperlicher Winkel, den 6 gleichſeitige Dreyecke machen, würde $6 . 60 = 160°$ halten, folglich in eine und eben dieſelbe Ebene fallen; eben das gilt von dem körperlichen Winkel, den vier Quadrate machen ſollen; denn $4 . 90 = 360°$; ſie fallen alſo auch in eine Ebene; und noch vielweniger würden die aus mehr Winkeln beſtehende reguläre Vielecke dazu taugen; z. E. das Sechseck hat zum Polygonwinkel 120°, folglich würden

drey

drey Flächen davon, die man wenigſtens haben müßte, 3 . 120 = 360° machen, welche ſchon in eine Ebene fallen.

§. 619. Zuſatz. Die Kugel, als ein Unendlicheck, könnte man noch als den ſechſten regulären Körper anſehen, der aus unendlich viel unendlich kleinen Flächen und aus gleichen körperlichen Winkeln, die aus dieſen unendlich vielen gleichen Flächen entſtehen, zuſammengeſetzt iſt.

Die Verwandlung der Körper.

§. 620. Lehrſatz. Ein ſchiefes Parallelepipedum kann in ein ſenkrechtes verwandelt werden, das ihm vollkommen gleich iſt, wenn es nur einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Oder zwey Parallelepipeda, die einerley Grundfläche und Höhe haben, ſind einander gleich. *Fig.* 70.

Satz. *Fig.* 70.

FGHKTCDR = FGHKNABS

Beweis.

DFHSBDR = CGKNACT
CLMSB = CLMSB ſubtr.

DFHSBDR—CLMSB=CGKNACT—CLMSB d. i. in der Figur

DFLMTC = BLGKNA. Ferner iſt
HFLMKG = HFLMKG addirt

DFLMTC+HFLMKG=BLGKNA+HFLMKG d. i. in der Figur

FGHKTCDR = FGHKNABS.

§. 621. Zuſatz. Ein jedes Parallelepipedum läßt ſich durch die Diagonallinie in zwey gleiche dreyeckigte Priſmata ver-

verwandeln, und jedes iſt die Hälfte von einem Parallelepipedum, das gleiche Höhe und Grundfläche hat.

§. 622. Zuſatz. Ein jeder Kubus läßt ſich in ein ſchiefes Parallelepipedum verwandeln, das mit dem Kubus gleichen Inhalts iſt.

§. 623. Zuſatz. Ein vieleckigtes Priſma läßt ſich durch die Diagonallinie in ſo viele dreyeckigte verwandeln, als die Grundlinie Seiten hat, weniger zwey. §. 519. Die Summe dieſer Priſmatum iſt dem Inhalt des vieleckigten gleich.

§. 624. Zuſatz. Weil der Zylinder als ein unendlicheckigtes Priſma angeſehen werden kann, ſo kann auch der Verſtand dieſe Verwandlung vom Zylinder denken.

§. 625. Lehrſatz. Ein jedes dreyeckigtes Priſma läßt ſich in drey vollkommen gleiche Pyramiden von einerley Höhe und Grundfläche verwandeln. Denn man darf ſich nur ein dreyeckigtes Priſma von Holz ſchneiden laſſen, und ſolche durch die Diagonallinien der Seitenflächen ſchneiden, ſo wird man drey gleiche Pyramiden bekommen. Wie ſolches durch den Augenſchein bey einem hölzernen Priſma bewieſen werden kann; das nöthigſte, was den Schnitt betrift, erſieht man auch aus *Fig.* 71.

§. 626. Zuſatz. Eine dreyeckigte Pyramide iſt alſo der dritte Theil eines dreyeckigten Priſma, das einerley Höhe und Grundfläche mit ihm hat.

§. 627. Zuſatz. Weil ein vieleckigtes Priſma in lauter dreyeckigte durch die Diagonalen ſich verwandeln läßt, ſo gilt dieſes auch von der Pyramide; und eine vieleckigte Pyramide von lauter ausgehenden Winkeln wird der dritte Theil eines eben ſo vieleckigten Priſma ſeyn.

§. 628.

§. 628. **Anmerk.** Die Beſtimmung von ausgehenden Winkeln ſetzen wir hinzu, weil von dieſen eigentlich die Rede iſt; welches Euklides ſupponirt, daher Herr le Sage Hiſt. de l'Acad. Roſ. des Scienc. à Paris 1762. unſeres Bedenkens die davon handelnde Stelle des Euklides nicht für fehlerhaft oder unterſchoben halten dürfte; weil der Beweis von einwärtsgehenden Winkeln nicht Statt hat, und Euklides dieſe Beſtimmung nicht beygeſetzt: Uns dünkt, er hat ſie ſupponirt, weil von ſolchen Winkeln eigentlich die Rede iſt. Unerachtet er bekanntermaſſen in körperlichen beſonders koniſchen Schnitten nicht ſo glücklich war, ſo wollen wir doch dieſes zu ſeiner Entſchuldigung anführen.

§. 629. **Lehrſatz.** Weil ein Kegel als eine Pyramide angeſehen werden kann, deren Grundfläche unendlich viel Ecke hat, ſo kann man auch den Kegel als den dritten Theil des Zylinders anſehen, der mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat.

§. 630. **Zuſatz.** Eine Kugel läßt ſich, wenigſtens durch den Verſtand, in eine Pyramide verwandeln, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und die Höhe der Radius iſt.

§. 631. **Lehrſatz.** Zween gleiche Kubi laſſen ſich in einen verwandeln, der den beyden gegebenen vollkommen gleich iſt. Oder: Ein Kubus oder Würfel läßt ſich verdoppeln, oder in einen andern Kubus verwandeln, der gerade noch einmal ſo groß iſt, als der gegebene. Denn es ſey des gegebenen Kubus Seite $= a$, ſo iſt ſein Inhalt a^3, die Seite des geſuchten $= x$, ſo iſt ſein Inhalt $= x^3$, folglich nach der Bedingung $x^3 = 2a^3$, und $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$; wenn man nun zwiſchen a und 2a zwo mittlere kontinuirlich geometriſche Proportionalzahlen ſuchet, ſo wird die erſte davon die geſuchte Seite ſeyn. Es ſeyn die zwo mittleren Proportionalzahlen x, y, daß die Progreſſion heiſſe a, x, y, 2a; ſo iſt

nr. I. $a : x = x : y$ | nr. II. $x : y = y : 2a.$

folgl. $ay = x^2$ | $2ax = y^2$

$$: a$$

$$y = \frac{x^2}{a} \text{ und quadrirt}$$

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$$ Es iſt aber auch nach nr. II.

$$y^2 = 2ax$$ folglich

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

$$\cdot a^2$$

$$x^4 = 2a^3x$$

$$: x$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$\sqrt[3]{\ } \text{extr.}$$

$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$. Da nun x die Seite des des doppelten Kubus iſt, ſo iſt es auch die erſte von zwo mittleren Proportionalgröſſen zwiſchen a und 2a; daher man durch dieſe Methode die Seite des doppelt ſo groſſen Kubus finden kann.

§. 632. Anmerk. Dieß iſt das ſogenannte Delphiſche Problem, welches unter den Alten eine ſehr berühmte Aufgabe war. Der heidniſche Apollo wurde um Abwendung der Peſt von den Athenienſern angerufen. Er verſprach zu helfen, wofern man ſeinen Altar zu Delphi, der ein völliger Kubus war, verdoppeln oder einen neuen Altar machen würde, der gerade noch einmal ſo groß, und doch wie der vorige, abermal ein vollkommener Kubus wäre. Dieſes Problem gab nun Griechenland allen ſeinen Weiſen auf, vermuthlich ſteckten es die Geometern ſelbſt hinter die delphiſchen Prieſter, damit der Ausſpruch des Apollo deſto eher alle Gelehrte in der griechiſchen Welt dazu aufmuntern möchte. Man wollte die Sache mit einer geometriſchen Zuverläſſigkeit und nicht mechaniſch ausmachen; da es aber den meiſten zu ſchwer fiel, ſo blieb das Problem lange Zeit unaufgelöſet. Eratoſthenes, Bi-

blio-

bliothekarius zu Alexandrien, und der bekannte Hippokrates, von dem wir ein quadrirtes mondförmiges Zirkelſtück, Lunulam Hippocratis, haben, fielen zuerſt darauf, daß das Problem von der Erfindung zwoer mittleren Proportionallinien zwiſchen zwo gegebenen Linien abhange; wie unſer oben gegebener Beweis lehret. Der Beweis iſt zwar mehr arithmetiſch als geometriſch; denn der Lehrſatz in Worten heißt folgendermaſſen: Wenn man die Seite des gegebenen Kubus mit der Kubikwurzel aus 2 multiplizirt, ſo hat man die Seite des Kubus, der noch einmal ſo groß iſt. Weil aber dieſes Produkt die erſte von zwo mittlern Proportionallinien zwiſchen a und 2a iſt, wie wir gezeigt haben, ſo läßt ſich der Beweis auch geometriſch vortragen.

Die Ausmeſſung der Körper.

§. 633. **Erklär.** Ein Körper wird ausgemeſſen, wenn man, wie in dem Flächenmaaß eine Fläche, alſo hier im Körpermaaß einen Körper zur Einheit macht, und ſuchet, wie oft dieſer zur Einheit gemachte Körper in dem andern enthalten ſey. 3. E. *Fig.* 80. *α*; da die Frage iſt, wie oft der kleine Körper AMNLK im groſſen ADGFEBC enthalten ſey, oder herumgelegt werden könne.

§. 634. **Zuſatz.** Der Körper AMNLK wird zur Einheit angenommen; und weil die vollkommenen Quadrate im Flächenmaaß die dienlichſt n Einheiten ſind, ſo hat man auch im Körpermaaß, vollkommene Kubos oder Würfel zur Einheit als die dienlichſten angenommen, wie wir ſogleich zeigen werden.

§. 635. **Zuſatz.** Wenn ein ſenkrechtes Parallelpipedum 6 Schuh lang, 4 Schuh breit, und 2 Schuh hoch iſt, und wenn *Fig.* 80. der Kubus AMNLK einen Schuh lang, breit und hoch iſt, ſo kann man ihn im gröſſern 4.2.6=48 mal herumlegen. Alſo iſt der Inhalt des groſſen Parallelepipedums =48.AMNLK.

§. 636.

§. 636. Zuſaz. Iſt alſo AMNLK = 1. ſo iſt der Inhalt = 48. Wo man allemal die Einheit hinzu denken muß.

§. 637. Zuſaz. Man kann alſo nicht überhaupt ſagen, wenn man genau redet, der Inhalt eines Parallelepipedums ſey das Produkt ſeiner drey Seiten; denn eigentlich zu reden, giebt eine Linie, ſie mag ſo oft multipliziet werden als ſie will, eben wieder eine Linie; wenn aber dieſes Produkt in einen Körper multiplizirt wird, ſo giebt es einen Körper: und wenn der Körper = 1, ſo iſt das Produkt der Linien, weil 1 nicht multiplizirt, durch den im Sinne hinzugedachten Faktor der Einheit der geſuchte Körper.

§. 638. Zuſaz. Weil im Längenmaaße ein Schuh 10″ hält, ſo hält ein Kubikſchuh, der 10″ lang, breit und hoch iſt, 10.10.10 Kubikzoll; und ein Kubikzoll 10.10.10 Kubiklinien; daher im Kubikmaaße die Linien, Zolle, Schuhe von 1000 zu 1000 gehen; das iſt, 1000 Kubiklinien geben einen Kubikzoll, 1000 Kubikzolle einen Kubikſchuhe, 1000 Kubikſchuhe eine Kubikruthe; und folglich ſind 34560327854‴ im Kubikmaaß 34°560′327″854‴.

§. 639. Zuſaz. Im Ganzen verſchlägt es übrigens nichts, (woſern nur das angenommene Maaß = 1 geſetzt wird) wenn man ſagt, ein Kubus ſey das dreyfache Produkt einer Seite, und ein ſenkrechtes Parallelepipedum das Produkt aller 3 Seiten. Die Seite des Kubus ſey drey, ſo iſt ſein Inhalt 3.3.3 = 27. oder a, ſo iſt ſein Inhalt a^3; die drey Seiten eines Parallelepipedums, 2, 4, 5, oder a, b, c, ſo iſt der Inhalt 2.4.5 = 40, oder abc; aber alles unter der oben geſetzten Bedingung.

§. 640. Zuſaz. Weil ein jedes ſchiefes Parallelopipedum in ein ſenkrechtes verwandelt werden kann, §. 620. ſo läßt ſich ein jedes ſchiefes Parallelopipedum ausmeſſen, es iſt nämlich das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe.

§. 641.

§. 641. Zuſatz. Und weil ein dreyeckigtes Priſma die Hälfte eines Parallelepipedums von einerley Grundfläche und Höhe iſt, ſo läßt ſich auch dieſes ausmeſſen: es iſt nämlich abermal das Produkt aus der Grundfläche, nämlich dem ausgemeſſenen Dreyecke in die Höhe des Priſma. Eben ſo ſind vieleckigte Priſmata, folglich auch das Unendlicheck, oder der Zylinder dem Produkt aus den Grundflächen in die Höhe gleich.

§. 642. Lehrſatz. Und weil die Pyramide der dritte Theil des Priſma von gleicher Höhe iſt, ſo iſt der Inhalt der Pyramide dem Produkte der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe gleich.

§. 643. Zuſatz. Eben ſo iſt der Inhalt des Kegels das Produkt aus der zirkularen Grundfläche in den dritten Theil der Höhe, weil der Konus der dritte Theil vom Zylinder iſt, der einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat.

§. 644. Zuſatz. Der abgekürzte Kegel wird ausgemeſſen, wenn man den abgeſchnittenen Theil des Kegels aus den beyden Zirkularflächen, und aus der gegebenen Höhe des abgekürzten Kegels ſucht, und hernach den kleinen Kegel von dem Ganzen ſubtrahirt. Denn es ſeyn *Fig.* 75. die beyden Radii DE und AC gegeben, ſo weis man auch ihre Differenz AB; es ſey ferner die Höhe des abgekürzten Kegels BD oder CE gegeben, ſo findet man die Höhe CF des ganzen Kegels, weil AB:BD = AC:CF, und auch die Höhe des kleinen Kegels FE = CF — EC, und daraus den ganzen Kegel, und ihre Differenz, den abgekürzten Kegel.

§. 645. Zuſatz. Wenn man die Oberfläche der Kugel weis, ſo findet man auch ihren Inhalt, welcher nach §. 630. dem Produkte aus der Oberfläche in den dritten Theil des Radius, oder in den ſechſten Theil des Diameters gleich ſeyn

wird. Wie man aber die Kugelfläche finde, werden wir ſogleich zeigen, weil wir von der Kugel beſonders handeln.

§. 646. **Zuſatz.** Irreguläre Körper werden durch allerhand Kunſtgriffe, z. E. durch Einlegen in ein mit Waſſer gefülltes vollkommenes Parallelepipedum u. ſ. w. auf die Regularität reduzirt, wie *Fig.* 82. Dieß aber gehört in die praktiſche Geometrie.

Die Kugel oder Sphäre.

§. 647. **Erklär.** Was eine Kugel ſey, und wie ſie entſtehe, haben wir §. 612. geſagt. Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geſchnitten wird, ſo entſtehen aus den Schnitten Zirkel; welche immer gröſſer werden, je näher die Schnitte dem Mittelpunkte der Kugel kommen, bis ſie im Mittelpunkte die gröſten werden; daher die **gröſten Zirkel** einer Kugel (Circuli maximi) diejenige ſind, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, und deren Periph͏erie ſich an der Kugelfläche endigt. Alle andere Zirkel ſind kleiner.

§. 648. **Lehrſatz.** Die Kugel iſt zween Drittheil von dem Zylinder gleich, der einerley Höhe und Diameter mit der Kugel hat. Denn man ſtelle ſich vor *Fig.* 76. das Quadrat DCBA bewege ſich um AD als eine Axe herum; ſo entſteht ein Zylinder. Zu gleicher Zeit ſollen ſich das gleichſchenkliche Dreyeck DCA auch um DA, und der Quadrant DGB ebenfalls um DA als um eine Axe herum bewegen, ſo wird im erſten Falle ein Konus, im andern eine halbe Kugel durch dieſe Bewegung entſtehen. Die Summe aller Durchſchnitte oder Scheiben vom Zylinder wird den Zylinder, die Summe aller Durchſchnitte oder Scheiben vom Konus den Konus, und die Summe aller Durchſchnitte von der Kugel die Kugel geben. Wenn man nun *Fig.* 76. einen beliebigen Durchſchnitt EH der dem Zylinder, dem Konus, und der Kugel gemein-

ſchaft-

ſchäftlich iſt, und hernach in den Durchſchnittspunkt der Kugel G aus A den Radius AG zieht, ſo wird der Beweis des vorgetragenen Lehrſatzes nicht ſchwer ſeyn.

Satz. *Fig.* 76.

Sphär. $= \frac{2}{3}$ Zyl.

Beweis.

$AG^2 = AE^2 + EG^2$ §. 503.

$AG^2 = EH^2$, weil $AG = AB = EH$ nach der Vorausſetzung

$EH^2 = AE^2 + EG^2$

$AE^2 = EF^2$, weil $AD : DC = AE : EF$

Folglich ſubſtituirt — $AD : DC = 1 : 1$, weil ADCB ein Quadrat iſt

$AE : EF = 1 : 1$; d. i.

$AE = EF$

$EH^2 = EF^2 + EG^2$

$EF^2 = EF^2$ ſubtr.

$EH^2 - EF^2 = EG^2$; folglich

Sum. EH^2 — Sum. EF^2 = Sum. EG^2; das iſt, weil ſich die Quadrate der Diam. wie die Zirkelflächen verhalten,

Zyl. — Kon. = Sphär. Es iſt aber

Zyl. — Kon. = Zyl. — $\frac{1}{3}$ Zyl. = $\frac{2}{3}$ Zyl.; daher

$\frac{2}{3}$ Zyl. = Sphär.

§. 649. Zuſatz. Ein Zylinder, Kugel und Kegel von gleichen Höhen verhält ſich alſo wie $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$, das iſt, wie 3, 2, 1.

§. 650. Anmerk. Dieſes iſt eine Erfindung des Archimedes, welcher ſo verliebt darein war, daß er ſie auf ſein Grabmaal zu ſtechen befohlen haben ſoll. Sie iſt auch in der That ein Be-

weis von einer nicht geringen Scharfſinnigkeit, wodurch ſich dieſer groſſe Geometer verewigt hat.

§. 651. **Lehrſatz.** Die Oberfläche der Kugel iſt vier größten Zirkeln (circulis maximis,) gleich.

Satz.

4 Circ. max. = Superfic. Sphær.

Beweis.

Circ. max. × Diam. = Cylindr.
——————————— . $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ Circ. max. × Diam. = $\frac{2}{3}$ Cyl.
Sphær. = $\frac{2}{3}$ Cyl.
———————————

$\frac{2}{3}$ Circ. max. × Diam. = Sphær.
$\frac{1}{6}$ Diam. × Superf. Sphær. = Sphær. nach §. 640.
———————————

$\frac{2}{3}$ Circ. max. × Diam. = $\frac{1}{6}$ Diam. × Superf. Sphær.
——————————— . 6

$\frac{12}{3}$ Circ. max. × Diam. = Diam. × Superf. Sphær.
——————————— : Diam.

$\frac{12}{3}$ Cir. max. = Superf. Sphær.; das iſt.
4 Circ. maximi = Superfic. Sphær.

§. 652. **Zuſatz.** Da nun der gröſte Zirkel gefunden wird, wenn man ſeine Peripherie mit dem vierten Theil des Durchmeſſers multiplizirt, ſo iſt die ganze Oberfläche der Kugel das Produkt aus der Peripherie des gröſten Zirkels in den Diameter; denn dieſes Produkt iſt vier Circulis maximis gleich.

§. 653. **Zuſatz.** Wenn man dieſes Produkt nochmal mit dem ſechſten Theil des Diameters multiplizirt, ſo hat man den Inhalt der Kugel.

§. 654.

§. 654. Zuſatz. Wenn man das Verhältniß des Diameters, wie oben 1 : π ſetzt, ſo iſt der Inhalt einer Kugel, deren Diameter d iſt $= \frac{\pi d^3}{6}$; denn πd iſt die Peripherie, weil 1 : π = d : πd; dieſes mit dem Diameter multiplizirt, giebt die Oberfläche der Kugel $= \pi d^2$ nach §. 652. und dieſes Produkt nochmalen mit dem ſechſten Theil des Diameters $= \frac{d}{6}$ multiplizirt, giebt $\frac{\pi d^3}{6}$, und wenn die Kugel S heiſſet, ſo iſt $\sqrt[3]{\frac{6 \cdot S}{\pi}} = d$.

§. 655. Zuſatz. Wenn eine andere Kugel zum Diameter D hat, ſo iſt ihr Inhalt aus gleichem Grunde $= \frac{\pi D^3}{6}$; folglich verhalten ſich zwey Kugeln A und B, wie die Kubi der Diameter. Denn es ſey $\frac{\pi D^3}{6} = A$, und $\frac{\pi d^3}{6} = B$; ſo iſt

$$A : B = \frac{\pi D^3}{6} : \frac{\pi d^3}{6}$$

$$\overline{\qquad\qquad} : \frac{\pi}{6}$$

$$A : B = D^3 : d^3.$$

§. 656. Zuſatz. Wenn das Ludolphiſche Verhältniß des Diameters zur Peripherie, wie 100 : 314 angenommen wird, ſo iſt das Verhältniß des Kubus vom Diameter zur Sphäre, wie 300 : 157, welches nach der obigen Formel in Zahlen leicht zu berechnen iſt.

§. 657. Anmerk. Kugeln laſſen ſich in Zylinder, Kegel u. ſ. w. verwandeln; wenn nur etwas, z. E. die Höhe von dem Körper gegeben wird, worinn ſie ſich verwandeln ſollen. Z. E. eine Kugel ſoll in einen Zylinder, deſſen Höhe = a, verwandelt wer-

den, man ſucht den Diameter des Zylinders; ſo iſt nach §. 652. wenn der Diameter = x geſetzt wird,

$\frac{d^3p}{6} = \frac{apx^2}{4}$; denn $1 : p = x : px \times \frac{1}{4}x = \frac{px^2}{4}$ = der Grundfläche $\times a = \frac{apx^2}{4}$

$$\overline{\qquad\qquad} : \frac{ap}{4} \text{ oder } . \frac{4}{ap}$$

$\frac{4d^3}{6a} = x^2$ oder $\frac{2d^3}{3a} = x^2$, daher

$3a : 2d = d^2 : x^2$.

Eben ſo läßt ſich ein Kegel in eine Kugel verwandeln; man ſucht den Diameter der Kugel, den wir x nennen; ſo iſt der Inhalt des Kegels, wenn ſeine Höhe a geſetzt iſt, $= \frac{ad^2p}{12}$; denn $1 : p = d : pd \times \frac{1}{4}d = \frac{pd^2}{4}$ die Grundfläche $\times \frac{1}{3}a = \frac{apd^2}{12}$, und der Kugel

$\frac{px^3}{6}$, daher

$$\frac{px^3}{6} = \frac{ad^2p}{12}$$

$$\overline{\qquad\qquad} : \frac{p}{6} \text{ oder } . \frac{6}{p}$$

$$x^3 = \tfrac{6}{12}ad^2 = \tfrac{1}{2}ad^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} : \sqrt[3]{\ }$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}ad^2}.$$

Man ſieht leicht, daß ſich noch verſchiedene Veränderungen dieſer Art durch Hilfe der Buchſtabenrechnung geben laſſen; wir genügen uns daher, nur einige gezeigt zu haben.

Die Kugelſchnitte.

§. 658. **Erklär.** Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geſchnitten wird, ſo heißt der Schnitt ein Kugelſchnitt, welcher allemal ein Zirkel iſt.

§. 659.

§. 659. Anmerk. Zum Ueberfluß kann man dieſe Folge, daß der Schnitt ein Zirkel ſey, auch beweiſen. Denn es ſey *Fig.* 78. in C der Mittelpunkt der Kugel, der Schnitt ſey BEFG; man fälle aus C den Perpendikel CH auf die flache Ebene des Schnittes, und ziehe die Radios CE, CF, und vereinige die Punkten E und H, wie auch F und H durch die Linien EH, FH, ſo iſt

nr. I. $CE^2 = EH^2 + CH^2$	nr. II. $CF^2 = FH^2 + CH^2$
$CE^2 - CH^2 = EH^2$	$CF^2 - CH^2 = FH^2$
Nach nr. II. $CE^2 - CH^2 = FH^2$	$CF^2 = CE^2$ ſind Radii
folglich $EH^2 = FH^2$	$CE^2 - CH^2 = FH^2$

$EH = FH$; daher BEFG ein Zirkel.

§. 660. **Zuſatz.** Wenn $CH = 0$, ſo iſt der Zirkel ein größter.

§. 661. **Zuſatz.** Weil alle größten Zirkel einen gemeinſchäftlichen Mittelpunkt mit der Kugel haben, ſo halbiren ſie alle einander. Und folglich ſind Zirkel, die einander halbiren, oder in zween gleiche Theile theilen, allemal größte Zirkel.

§. 662. **Erklär.** Zween einander ſo entgegengeſetzte Punkte der Kugel, daß eine gerade Linie von einem zum andern durch den Mittelpunkt der Kugel geht, oder ihr Diameter iſt, heiſſen die **Pole** der Kugel, und in Rückſicht auf den Zirkel, durch deſſen Mittelpunkt ſie gehen, und auf deſſen Fläche ſie perpendikular ſtehen, Pole des Zirkels.

§. 663. **Zuſatz.** Sie ſind alſo von allen Punkten eines gegebenen Parallelzirkels gleich weit entfernt.

§. 664. **Zuſatz.** Eine Kugel auf eine ebene Fläche gelegt, berührt ſie nur in einem unendlich kleinen Theil, und die Ebene iſt für die Kugel was die Tangente für den Zirkel iſt.

§. 665. **Zuſatz.** Parallelzirkel, wie *Fig.* 77. die Zirkel MN, KL, haben einerley Pole, nämlich P und Q.

§. 666. **Zuſatz.** Zween größte Zirkel, deren ein jeder durch den Pol des andern geht, ſtehen auf einander ſenkrecht. Nach der Erklärung §. 662.

§. 667. **Lehrſatz.** Wenn ein größter Zirkel durch den Pol des andern geht, ſo iſt der Bogen zwiſchen dem Pol und dem Zirkel ein Quadrant, und wenn zween größte Kreiſe auf einander perpendikular ſtehen, ſo geht ein jeder durch den Pol des andern. Denn es ſey *Fig.* 77. KDEL ein größter Zirkel; durch ſeine Pole P und Q gehe ein anderer größter Zirkel PGDQ, ſo werden ſie beyde einander im Mittelpunkte der Kugel ſchneiden, und durch den gemeinſchäftlichen Diameter halbiren; folglich iſt PC = CQ, und eben ſo PC = DC; und PCD der Winkel, den der größte Zirkel KDEL mit dem andern durch ſeinen Pol gehenden größten Zirkel PGDQ macht; da nun dieſer ein rechter iſt oder 90° hält, §. 662. ſo muß der Bogen PD, das Maaß des rechten Winkels PCD ein Quadrant ſeyn. Denn daß er das Maaß des rechten Winkels iſt, erhellet daher, daß PC = CD, folglich wird mit dem Radius CD = PC aus dem Mittelpunkt C der Bogen PD gezogen, welcher das Maaß des Winkels iſt. Eben ſo, wenn PD = 90°, ſo iſt der Winkel PCD, deſſen Maaß PD iſt, auch 90° oder ein rechter.

§. 668. **Zuſatz.** Wenn auf gleiche Weiſe durch eben dieſe Pole ein anderer größter Zirkel gezogen wird, wie PHEQ, ſo iſt auch PE ein Quadrant, und der Winkel PCE = 90°. Daher bey D und E rechte Winkel ſind. Eben das gilt, wenn mehrere ſolche Zirkel durch P und Q gezogen werden.

§. 669.

§. 669. **Zuſatz.** Weil DC auf CP, und EC auf CP perpendikular iſt, ſo iſt der Winkel ECD der Neigungswinkel der beyden Zirkelflächen PGDQ und PHEQ.

§. 670. **Zuſatz.** Wenn AQ die Tangente von PDQ, und BQ die Tangente von PEQ iſt, ſo iſt der Winkel AQB dem Neigungswinkel DCE gleich.

§. 671. **Zuſatz.** In einem jeden Parallelkreiſe mit KDL, iſt der Neigungswinkel GFH dem Neigungswinkel DCE gleich, folglich ſind die Bögen GH, DE ähnlich; und haben eine gleiche Anzahl Grade; denn ſie ſind beyde das Maaß der gemeldten Winkel.

§. 672. **Erklär.** Ein Winkel, den zween gröſte Zirkel mit einander machen, heißt ein **ſphäriſcher Winkel**; z. E. der Winkel PDE; daher er auch durch Bögen von gröſten Zirkeln gemeſſen wird; und ein ſphäriſches Dreyeck heißt ein Dreyeck, das aus drey ſphäriſchen Winkeln, und folglich auch aus drey Bögen von gröſten Kreiſen beſtehet.

§. 673. **Zuſatz.** Weil zween Bögen gröſter Zirkel, die aus einem Punkt, z. E. dem Pole kommen, auf einen dritten gröſten Zirkel einen Bogen abſchneiden können, ſo ſieht man ſchon, daß ein ſphäriſches Dreyeck mehr als zween rechte Winkel haben könne; wie *Fig.* 77. das Dreyeck PDE.

§. 674. Zuſatz. Wenn PE von PD um 90 Grad entfernt wäre, ſo hätte das Dreyeck drey rechte Winkel. Vier kann es nicht haben, wie unten in der ſphäriſchen Trigonometrie gezeigt wird.

§. 675. Anmerk. Die ſphäriſche Trigonometrie wird beſonders abgehandelt werden; daher das Weitere von den ſphäriſchen Dreyecken in der beſondern Abhandlung davon vorgetragen werden ſoll. In dem bisherigen haben wir die Elementargeometrie ſo vollſtändig vorzutragen geſucht, als man ſie irgendwo in den neueſten Schriften finden wird.

Digitized by Google

Zweytes Hauptſtück, von der Trigonometrie.

§. 676.

Erklärung.

Die Trigonometrie lehret, wie aus drey gegebenen Stücken eines Dreyecks, worunter bey ebenen Dreyecken wenigſtens eine Seite ſeyn muß, weil ſonſt die Winkel allein unendlich vielen Dreyecken gemein ſeyn könnten, die übrigen Drey finden ſoll; man giebt einem nämlich die drey Stücke des Dreyecks in Zahlen, oder auch allgemein, in Buchſtaben, daraus man das Geſuchte durch Rechnung findet.

§. 677. Anmerk. Die Trigonometrie gehört daher theils zur Geometrie, theils zur Arithmetik, und wird wegen ihrem ungemeinen Nutzen in der angewandten Mathematik als eine beſondere Wiſſenſchaft abgehandelt, auch die ebene von der ſphäriſchen getrennt, weil jene in allen mathematiſchen, dieſe aber nur in den aſtronomiſchen und damit verbundenen Wiſſenſchaften ihren Nutzen hat. Wir werden daher, wenn wir die Geſchichte vorgetragen haben, in zweyen Kapiteln von der ebenen ſowohl als von der ſphäriſchen Trigonometrie handeln.

Geſchichte der Trigonometrie.

§. 678. Wie die menſchlichen Bedürfniſſe den bisher vorgetragenen Wiſſenſchaften ihren Urſprung gaben, ſo hat auch die Trigonometrie ihr erſtes Daſeyn denſelben zu danken.

Die

Die Beſtimmung der Zeiten konnte ohne Kenntniß des Himmels nicht in Richtigkeit gebracht werden; die Erſcheinungen aber am Himmel genau zu beſtimmen, hatte man beſonders die Trigonometrie nöthig. Daher ſchon die Alten ſich dießfalls viele Mühe gegeben, und die Trigonometrie meiſtens ihren aſtronomiſchen Werken vorgeſeßt haben.

§. 679. Der erſte, von dem man weis, daß er etwas Trigonometriſches geſchrieben habe, deſſen Arbeit aber verloren gegangen, war **Hipparchus**, der zwölf Bücher de Triangulis verfertigte. Klaud. **Ptolemäus**, der etliche hundert Jahre ſpäter gelebt, im zweyten Jahrhundert unſerer Zeitrechnung, machte im erſten Buch ſeines Almagesti einen Auszug daraus, den wir noch haben; von dieſer Zeit an war man mit den Hipparchiſchen Erfindungen zufrieden, bis vor ungefähr 300 Jahren **Joh. Regiomontanus**, oder **Joh. Müller** von Königshofen in Franken, ein Nürnbergiſcher Aſtronom, die Trigonometrie in einem beſondern Werk de Triangulis gemeinnütziger machte. Er hat die Tabulas ſinuum, wie wir ſie noch haben, berechnet, wiewohl er anfänglich den Radius oder Sinus totus nicht in 10 Millionen, ſondern in 60 tauſend Theile getheilet hat. Dieſe Arbeit aber blieb im Rechnen noch immer ſehr mühſam, bis vollends die logarithmiſchen Erfindungen hinzu kamen, welche man insgemein dem **Joh. Neper**, Baron von Merchiſton, einem Schottländer, zuſchreibt, der ſie 1614. zu Edinburg in ſeinem herausgegebenen Canone Mirifico Logarithmornm zuerſt bekannt gemacht haben ſoll; wiewohl andere einen Deutſchen, den Joſt **Byrge** zum Erfinder machen.

§. 680. Anmerk. Von dieſem Joſt Byrge kann man nicht gewiß ſagen, ob er ein Schweitzer oder ein Heſſe von Geburt war, wohl aber, daß er ſich in Heſſenkaſſel lange Zeit aufgehalten habe, wie ich in meinen Amœnit. Acad. vom Jahr 1754. Fasc. I. unter dem Titel: Memorabilia Germaniæ literatæ gezeigt habe. Er war in mathematiſchen und beſonders aſtronomiſchen Wiſſenſchaften wohl be-

bewandert, welches Zeugniß ihm Keppler giebt; wiewohl er ihn einen zaudernden Menſchen nennt, der ſeine Geheimniſſe, beſonders die Logarithmen, verborgen hielte, und nicht wollte auskommen laſſen. Die Stelle des Kepplers ſteht in ſeinen Tabulis Rudolphinis c. 3. p. 11. wo er dieſen Joſt Byrge eben in Rückſicht auf ſeine logarithmiſche Erfindung einen Hominem Cunctatorem & Secretorum ſuorum cuſtodem, qui fœtum in partu deſtituit & non ad uſus publicos educavit, ausdrücklich nennet. Mich dünkt, dieſes Zeugniß könne doch etwas gelten, und beweiſe wenigſtens ſo viel, daß Byrge vor dem Neper ſchon dieſe Kunſt gewußt, wenn ſie gleich Neper hernach von ſich ſelbſt und nicht von dem geheimnißvollen Byrge gelernet hat.

§. 681. **Neper** hat die Logarithmen nur auf die Minuten berechnet, und den Sinum totum = 0 geſetzt, daß die Logarithmen negativ werden, wenn die Sinus wachſen. Weil aber dieß unbequem ſcheint, ſo hat Heinr. **Brigg**, Prof. zu Oxfort, auf Gutbefinden des Joh. **Nepers**, im Jahr 1624. in ſeiner herausgegebenen Arithmetica logarithmica den Sinum totum = 1, und deſſen Logarithmus = 0, angenommen, und nach denſelben berechnet. Benjamin **Urſinus** hat in dem ſeiner Trigonom. angehängten Canone logarithmorum ſie noch weiter von 10 zu 10 Sekunden berechnet. Adrian **Vlacq** hat 1628. die Logarithmen von 20000 bis 90000 vollends hinzugethan, auch die Logarithmos Sinuum, Tangentium nach dieſer Art berechnet, und zwar zum Unglück für ihn, gerade um hundert Jahr früher, als die neueren Entdeckungen gemacht wurden, durch deren Hilfe man alles dieß mit ungleich geringerer Mühe hätte berechnen können. Denn ſeit fünfzig Jahren hat man durch die Rechnung des Unendlichen ſolche Kunſtgriffe erfunden, welche das ſonſt ſo beſchwerliche Rechnen, dem ſich **Neper**, **Brigg** und **Vlacq** unterzogen haben, ungemein erleichtern. Die Vlacquiſchen Tabellen hält man für die korrekteſten, doch kann man auch die Wolfiſchen gebrauchen (*).

(*) Unter die beſten und neueſten Tabellen dieſer Art gehören unſtreitig: Joh. Schulze neue und erweiterte Sammlung

lung Logarithmiſcher, Trigonometriſcher ꝛc. Tafeln 2 Bände Berlin 1778. Und Hrn. Georg Vega ꝛc. Logarithmiſche, und andere z. G. d. Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien bey Joh. Thomas Edlen von Trattnern 1781., welche ſich durch ihre Korrektheit vorzüglich empfehlen.

§. 682. Anmerk. Was man bis zu Anfang gegenwärtigen Jahrhunderts in der Trigonometrie wußte, hat der Freyherr von Wolf in ſeine mathematiſchen Schriften eingetragen. Darinn aber ſchien er was eigenes zu haben, das eben nicht ſo gar löblich iſt, daß er von allen neuen Entdeckungen, die ſeit dieſer Zeit gemacht wurden, bey den neuen Auflagen ſeiner Schriften das mindeſte nicht eingeſchaltet, und daher nach dem Zeugniß aller Kenner, die Trigonometrie, deren wichtigen Einfluß in andere Wiſſenſchaften er doch überall rühmet, nichts deſtoweniger ſo unvollſtändig und abgekürzt vorgetragen hat, daß man um ſelbe zu ergänzen, entweder Zuſätze in den Kollegien diktiren, oder ein anders Handbuch zum Leſen zu Grunde legen muß. Wir werden uns daher bemühen, dieſen Abgang hier zu erſetzen, und aus den neueſten Schriften dieſer Art dasjenige hinzuzuthun, was zur Vollſtändigkeit dieſer ungemein fruchtbaren Wiſſenſchaft auf irgend eine Weiſe ſich hinzuſagen läßt.

Erſtes Kapitel.

Von der ebenen Trigonometrie.

§. 683.

Erklärung.

Die ebene Trigonometrie (Trigonometria plana) lehret aus drey gegebenen Stücken eines ebenen Dreyecks, unter welchen wenigſtens eine Seite ſeyn muß, die übrigen drey Stücke durch Rechnung zu finden.

§. 684.

§. 684. Zuſatz. Eine Seite muß deßwegen gegeben ſeyn, weil drey Winkel unendlich viele ähnliche Dreyecke beſtimmen, und folglich die Seiten der Dreyecke in der ebenen Trigonometrie aus drey gegebenen Winkeln anders nicht als unbeſtimmt gefunden werden; man will aber die Seiten beſtimmt wiſſen. Wie dießfalls die ſphäriſche Trigonometrie von der ebenen unterſchieden ſey, werden wir unten zeigen.

Allgemeine Begriffe vom Sinus, Koſinus, Tangenten, Kotangenten, Sekanten und Koſekanten.

§. 685. Erklär. Eine Perpendikularlinie, welche von dem Endpunkt eines Radius auf einen andern Radius herabgefället wird, heißt der Sinus des Bogens, der zwiſchen den Radius enthalten iſt. *Fig.* 84. iſt alſo DE der Sinus des Bogens DA.

§. 686. Zuſatz. Weil der Bogen DA das Maaß des Winkels DCA iſt, ſo iſt DE auch der Sinus dieſes Winkels.

§. 687. Zuſatz Wenn der Sinus in gerader Linie verlängert wird, bis er den Zirkel wieder ſchneidet, ſo entſteht eine Sehne (Chorda) DF, von welcher der Sinus die Hälfte iſt; das iſt $DE = \frac{1}{2}DF$.

§. 688. Zuſatz. Weil von dem Endpunkt des Radius DC auf dem Radius CB keine andere Perpendikularlinie gefällt werden kann, als diejenige, die auf den rückwärts nach A verlängerten Radius ſich fällen läßt, nämlich wieder DE, ſo iſt der vorige Sinus der Sinus von beyden Bögen, die zuſammen einen halben Zirkel oder 180° machen.

§. 689. Zuſatz. Zween Nebenwinkel haben alſo einerley Sinus; ſo iſt z. E. der Sinus von 30° auch der Sinus von 150°, das iſt, der Sinus des ſpitzigen Winkels iſt auch der Sinus ſeines ſtumpfen Nebenwinkels.

§. 690. Zuſatz. Die Sinus wachſen von A oder 0 Grad bis auf 90° oder H, wo im erſten Quadranten HC der gröſte Sinus wird, von dannen nehmen ſie wieder ab bis B oder 180°, wo der Sinus abermal null wird; von B bis L alſo 180 + 90 = 270° nehmen ſie aber auf der entgegengeſetzten Seite des Diameters AB wieder zu, und von L bis A oder 360° nochmal auf dieſer Seite wieder ab; und wenn man die Peripherie verdoppelt, ſo nehmen ſie von 360° oder A bis H, als 360° + 90° = 450° wieder auf der erſten Seite zu, und von H oder 450° bis B oder 450° + 90° = 540° auf eben der Seite wieder ab u. ſ. w. wie oben; denn man kann die Peripherie ſo vielmal nehmen als man will.

§. 691. Zuſatz. Der gröſte Sinus, wie CH, iſt dem Radius gleich.

§. 692. Erklär. Der gröſte Sinus, das iſt der Radius, heiſt in der Trigonometrie der Sinus totus.

§. 693. Zuſatz. Weil kein Sinus gröſſer wird als der Sinus totus, ſo kann man die Sinus als eigentliche Brüche vom Sinus totus oder Radius anſehen.

§. 694. Erklär. Poſitiv heiſt bey einer Figur, was gegen die eine, negativ, was gegen die andere Seite zu liegt; oder umgekehrt, ſo daß beyde Gröſſen gerade entgegen geſetzt ſind. Oder auch nach den arithmetiſchen Gründen, das negative entſteht aus dem Uebergang durch das Nichts oder die Nulle.

§. 695.

§. 695. Zuſatz. Die Sinus von 0 bis 180° ſind alſo poſitiv, und die von 180 bis 360° ſind negativ nach §. 690.; und dieſes Verhältniß bleibt auch bey Vervielfältigung der Peripherie. Oder wenn man die vier Quadranten eines Zirkels betrachtet, ſo ſind die Sinus in den zween erſten poſitiv, in den zween letztern negativ, bey der Verdoppelung abermal im fünften und ſechſten poſitiv, im ſiebenten und achten negativ u. ſ. w.

§. 696. Zuſatz. DE iſt alſo der Sinus vom Bogen DA, und vom Bogen DB, ferner von dem Bogen DBd aber negativ, und vom Bogen DBdA aber auch negativ; weiter vom Bogen ADBdAD aber wieder poſitiv, u. ſ. w. ins Unendliche.

§. 697. Zuſatz. Ein einziger Sinus iſt alſo der Sinus von unendlich vielen Bögen; daher kein beſtimmtes Verhältniß zwiſchen dem Bogen und ſeinem Sinus ſich geben läßt.

§. 698. Anmerk. Daß es auſſer dem Sinus totus nur einen einzigen Sinus gebe, nämlich den Sinus von 60°, der genau und ohne die Aproximation berechnet werden kann, werden wir unten zeigen.

§. 699. Erklär. Wenn ein Bogen unter 90° gegeben iſt, ſo heißt die Anzahl Grade, oder der Bogen, der zu ihm addirt, 90 Grade vollends giebt, das Complementum (Ergänzung) zu 90°, und der Sinus dieſes Bogens der Sinus Complementi oder Koſinus. *Fig.* 84. iſt DH das Complementum von AD, denn AD + DH = 90°; der Sinus von DH iſt DK, nun iſt DK = EC; folglich auch EC der Sinus des Bogens DH, oder Sinus Complementi oder Koſinus des Bogens AD.

§. 700. **Lehrſatz.** Aus dem gegebenen Radius und Sinus eines Bogens läßt ſich der Koſinus finden: er iſt nämlich allemal die Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate des Radius und des Sinus.

Satz. *Fig.* 84.

$EC = \sqrt{(CD^2 - ED^2)}$

Beweis.

$CD^2 = ED^2 + EC^2$ nach dem pythag. Lehrſatz.
$ED^2 = ED^2$

——————— ſubtr.

$CD^2 - ED^2 = EC^2$

——————— $\sqrt{}$ extrahirt

$\sqrt{CD^2 - ED^2} = EC.$

§. 701. **Zuſatz.** Wenn der Radius $= 1$, und der Sinus $= s$, ſo iſt der Koſ. $= \sqrt{(1 - s^2)}$.

§. 702. **Zuſatz.** Wenn der Koſinus nebſt dem Radius gegeben, ſo iſt der Sinus auch gegeben, denn wenn der Koſ. σ, ſo iſt $s = \sqrt{(1 - \sigma^2)}$.

§. 703. **Zuſatz.** Die Koſinus nehmen ab, wenn die Sinus wachſen, hingegen wachſen ſie, wenn die Sinus abnehmen. Denn *Fig.* 84. je gröſſer ED wird, deſto kleiner wird EC, und umgekehrt.

§. 704. **Zuſatz.** Wenn der Sinus dem Radius gleich wird in CH, ſo fällt der Koſinus in den Mittelpunkt C und verſchwindet, oder wird $= 0$, folglich ſind die Koſinus der Bögen über 90° negativ bis auf 180°, wo der Sinus $= 0$, der Koſ. aber $= CB = - AC =$ Rad. und daher ein Gröſtes wird; dann nimmt er wieder ab bis auf $180 + 90 = 270$, wo er zum zweytenmal $= 0$ wird; von da an wird er wieder poſitiv, und nimmt zu bis 360°, wo er $= AC$, und von da an bis H, oder bis $360 + 90 = 450°$ wieder abnimmt und 0 wird u. ſ. w.

§. 705.

§. 705. **Zuſatz.** Die Koſinus vom erſten und vierten Quadranten ſind alſo poſitiv, die von den zwey mittlern, nämlich zweyten und dritten, ſind negativ u. ſ. w.

§. 706. **Zuſatz.** Ein jeder Koſinus gehört, wie der Sinus, unendlich vielen Bögen zu.

§. 707. **Erklär.** Eine gerade Linie, die den Zirkel in dem Punkt, wo der Bogen anfängt, unter einen rechten Winkel mit dem Radius berührt, und von dem andern verlängerten Radius geſchnitten und folglich beſtimmt wird, heißt die Tangente des Bogens, und der ſie ſchneidende verlängerte Radius die Sekante. So iſt AG die Tangente und CG die Sekante. *Fig.* 84.

§. 708. **Lehrſatz.** Aus dem Radius und Sinus iſt der Koſinus, nach §. 700. und aus beyden die Tangente und Sekante gegeben. Denn wenn der Radius $= r$, und der Winkel oder Bogen $AD = \varphi$ geſetzt wird, ſo iſt

I. Satz. *Fig.* 84.

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{r\,.\,\text{ſin.}\,\varphi}{\cos.\varphi}$$

Beweis.

$\triangle ECD \backsim \triangle AGC$

folglich

EC : ED = AC : AG das iſt in Buchſtaben:

$$\cos.\varphi : \text{ſin.}\,\varphi = r : \frac{r\,.\,\text{ſin.}\,\varphi}{\cos.\varphi} = AG.$$

Aber AG = tang. Alſo

$$\frac{r\,.\,\text{ſin.}\,\varphi}{\cos.\varphi} = \text{tang.}\,\varphi$$

II. Satz. *Fig.* 84.

$$\text{ſecant.}\,\phi = \frac{r^2}{\cos.\phi}$$

Beweis.

$\Delta ECD \backsim \Delta AGC$. Folglich

$EC : CD = CA : CG$

$CD = CA$ ſind Radii: ſubſtit.

$EC : CA = CA : CG$ in Buchſtaben

$\cos.\phi : r = r : \frac{r^2}{\cos.\phi} = CG$

Aber $CG = \text{ſec.}$ Alſo

$$\frac{r^2}{\cos.\phi} = \text{ſec.}\,\phi$$

§. 709. Zuſatz. Nach dem pythagoriſchen Lehrſatz iſt $CG^2 = AG^2 + AC^2$, und $CG = \sqrt{AG^2 + AC^2}$, das iſt in Buchſtaben ſec. $\phi = \sqrt{(\text{tang.}\,\phi)^2 + r^2}$, das iſt, die Sekante iſt die Quadratwurzel aus der Summe des Quadrats der Tangente und des Quadrats des Radius, und man kann aus der Tangente die Sekante finden.

§. 710. Zuſatz. Auf gleiche Weiſe kann man aus der Tangente und dem Koſinus den Sinus u. ſ. w., oder überhaupt, wenn der Radius als bekannt angenommen wird, aus zwey Stücken, welche man will, das dritte finden; wenn man nur die ähnliche Dreyecke *Fig.* 84. betrachtet, und daraus das geſuchte herleitet.

§. 711. Zuſatz. Wenn $\cos.\phi = 0$, ſo iſt $\frac{r.\,\text{ſin.}\,\phi}{\cos.\phi} = \frac{r.\,\text{ſin.}\,\phi}{0} = \infty$, und $\frac{r^2}{\cos.\phi} = \frac{r^2}{0} = \infty$; folglich Tan-

gente

gente und Sekante unendlich; da nun cos.ϕ zweymal in den 4 Quadranten unendlich klein oder $= 0$ wird, ſo wird auch die Tangente und Sekante zweymal unendlich, und zwar eben da, wo der Koſ. null wird. Eben dieß erhellt aus der Figur, weil in beyden Fällen bey H und L die Tangenten und Sekanten Parallellinien werden, die unendlich fortgehen, ohne einander zu ſchneiden.

§. 712. **Zuſatz.** Wenn ſin.$\phi = 0$, ſo iſt die tang. auch $= 0$; wie aus dem Ausdruck ſogleich erhellt; folglich wird die Tangente zweymal in den 4 Quadranten null, und zwar eben da, wo der Sinus null wird, die Sekante aber wird in dieſem Fall dem Radius gleich.

§. 713. **Zuſatz.** Im erſten und dritten Quadranten ſind alſo die Tangenten bejahend, im zweyten und vierten verneinend oder negativ.

§. 714. **Zuſatz.** Eine jede Tangente und Sekante korreſpondirt unendlich vielen Bögen.

§. 715. **Erklär.** Die Kotangente iſt die Tangente des Ergänzungsbogen zu 90°, welche durch die Sekante dieſes Bogens, die deßwegen Koſekante heißt, geſchnitten und beſtimmt wird.

§. 716. **Lehrſatz.** Durch dem Sinus, der Tangente, und dem Radius wird die Kotangente und Koſekante beſtimmt. Denn es ſeyn die Buchſtaben wie oben §. 708., ſo iſt

I. Satz. *Fig.* 85.

$$\text{cot.}\,\phi = \frac{r^2}{\text{tang.}\,\phi}$$

II. Satz *Fig.* 85.

$$\text{coſec.}\,\phi = \frac{r^2}{\text{ſin.}\,\phi}$$

Bew.

Weil AG, CH parallel; ſo iſt der Wink. $G = GCH$. §. 456.

$A = H$ ſind rechte $= 90°$

$\Delta GAC \sim \Delta CHK$ Daher

$AG : AC = CH : HK$

$AC = CH$ ſind Rad.

$AG . AC = AC : HK$; das iſt in Buchſt.

$\text{tang.}\varphi : r = r : \frac{r^2}{\text{tang.}\varphi} = HK = \text{cot.}$

Bew.

$G = GCH$

$A = H$

$\Delta GAC \sim \Delta CHK$

$\Delta GAC \sim \Delta DEC$

$\Delta DEC \sim CHK$. folgl.

$ED : CD = CH : CK$

$CD = CH$ ſind Rad.

$ED : CD = CD : CK$; in Buchſt.

$\text{ſin.}\varphi : r = r : \frac{r^2}{\text{ſin.}\varphi} = CK = \text{coſec.}$

§. 717. **Zuſatz.** Was von den Tangenten in Abſicht auf ihre Zeichen nach den verſchiedenen Quadranten und auf die unendlich viele Bögen, die ihnen korreſpondiren können, geſagt worden, gilt auch von den Kotangenten.

§. 718. **Lehrſatz.** Die Kotangenten verhalten ſich umgekehrt, wie die Tangenten. Denn es ſey ein anderer Bogen $= \pi$, ſo iſt nach §. 716. $\text{cot.}\pi = \frac{r^2}{\text{tang.}\pi}$.

Taf. *Fig.* 85.

$\text{cot}\,\pi : \text{cot.}\varphi = \text{tang.}\varphi : \text{tang.}\pi$.

Beweis.

$\text{cot.}\pi : \frac{r^2}{\text{tang.}\pi} = \text{cot.}\varphi : \frac{r^2}{\text{tang.}\varphi}$ Denn beyde Paar Glieder ſind gleich.

verſetzt

$$\cot.\pi : \cot.\varphi = \frac{r^2}{\text{tang}.\pi} : \frac{r^2}{\text{tang}.\varphi}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ .\text{tang}.\pi$$

$$= r^2 : \frac{\text{tang}.\pi \,.\, r^2}{\text{tang}.\varphi}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ .\text{tang}.\varphi$$

$$= r^2.\text{tang}.\varphi : \text{tang}.\pi \,.\, r^2$$

$$\cot.\pi : \cot.\varphi = r^2.\text{tang}.\varphi : r^2.\text{tang}.\pi$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ : r^2$$

$$\cot.\pi : \cot.\varphi = \text{tang}.\varphi : \text{tang}.\pi.$$

§. 719. **Erklär.** Der Abſchnitt des Radius durch den Sinus, nämlich AE, heißt der Sinus verſus; man kann ihn wie die anderen Stücke leicht finden.

§. 720. **Anmerk.** Der Lehrſatz §. 716. iſt wohl zu merken, er hat ſowohl hier als in der ſphäriſchen Trigonometrie ſeinen Nutzen; übrigens können die bisherigen Sätze kürzlich ſo gefaßt, und dem Gemüth eingedrückt werden. Es ſoll π einen halben Zirkel bedeuten, der Radius $= 1$; ſo wird

I.	II.	III.	IV.
$\sin.0\pi = 0$	$\cos.0\pi = 1$	$\text{tang}.0\pi = 0$	$\cot.0\pi = \infty$
$\sin.\frac{1}{2}\pi = 1$	$\cos.\frac{1}{2}\pi = 0$	$\text{tang}.\frac{1}{2}\pi = \infty$	$\cot.\frac{1}{2}\pi = 0$
$\sin.\pi = 0$	$\cos.\pi = -1$	$\text{tang}.\pi = 0$	$\cot.\pi = -\infty$
$\sin.\left\vert\begin{matrix}\frac{3}{2}\pi \\ 3.90^\circ\end{matrix}\right. = -1$	$\cos.\left\vert\begin{matrix}\frac{3}{2}\pi \\ 3.90^\circ\end{matrix}\right. = 0$	$\text{tang}.\frac{3}{2}\pi = -\infty$	$\cot.\frac{3}{2}\pi = 0$
$\sin.2\pi = 0$	$\cos.2\pi = 1$	$\text{tang}.2\pi = 0$	$\cot.2\pi = \infty$

Und wenn ein Bogen überhaupt z genannt wird, ſo iſt, nach den obigen bewieſenen Lehrſätzen und nur kurzer Wiederholung, wenn der Radius immer $= 1$.

I. $(\text{ſin.}z)^2+(\text{cos.}z)^2=1.$ $(\text{tang.}z).(\text{cot.}z)=1.$

II. $\text{ſin.}z=\text{cos.}z\times\text{tang.}z$ $\text{ſin.}z=\frac{\text{cos.}z}{\text{cot.}z}$

III. $\text{cos.}z=\frac{\text{ſin.}z}{\text{tang.}z}$ $\text{cos.}z=\text{ſin.}z\,.\,\text{cot.}z$

IV. $\text{tang.}z=\frac{\text{ſin.}z}{\text{cot.}z}$ $\text{tang.}z=\frac{1}{\text{cot.}z.}$

V. $\text{cot.}z=\frac{\text{cos.}z}{\text{ſin.}z}$ $\text{cot.}z=\frac{1}{\text{tang.}z}$ (*).

VI. $\text{tang.}x:\text{tang.}z=\text{cot.}z:\text{cot.}x.$

welche Formeln man in Bereitſchaft halten muß, wenn man in trigonometriſchen Rechnungen fortkommen will.

(*) Nr. I. Die erſte Formel für $r^2=1$ iſt aus dem pythagoriſchen Lehrſatze hergenommen; die zweyte aus §. 716. $\text{cotang.}\phi=\frac{r^2}{\text{tang.}\phi}$; wird anſtatt ϕ geſetzt z und $r=1$, ſo iſt $\text{cot.}z=\frac{1}{\text{tang.}z}$ oder $\text{cot.}z\times\text{tang.}z=1.$

Nr. II. Die erſte Formel für den Sinus, oder die Halbſehne iſt aus §. 708. $\text{tang.}\phi=\frac{r.\text{ſin.}\phi.}{\text{cos.}\phi}$; $\phi=z$ und $r=1$, iſt $\text{tang.}z=\frac{\text{ſin}\ z.}{\text{cos.}\ z}=\text{tang.}\ z\times\text{cos.}\ z=\text{ſin.}\ z.$

Die zweyte iſt aus den Formeln §. 716. $\text{cot.}\phi=\frac{r^2}{\text{tang.}\phi}$ und §. 708. $\text{tang.}\phi=\frac{r.\text{ſin.}\phi}{\text{cos.}\phi}$ zuſammengeſetzt. Denn ſetzt man in der erſtern ſtatt $\text{tang.}\phi$ ihren Werth, ſo iſt

cot.φ

$$\cot.\phi = r^2 : \frac{r.\sin.\phi}{\cos.\phi}$$

——— oder

$$\cot.\phi = \frac{r^2.\cos.\phi}{r.\sin.\phi}$$

——— oder

$$\cot.\phi = \frac{r.\cos.\phi}{\sin.\phi}$$

——— und

$$\cot.\phi \times \sin.\phi = r.\cos.\phi$$

——— oder

$$\sin.\phi = \frac{r.\cos.\phi}{\cot.\phi}$$

——— und $\phi = z$; $r = 1$

$$\sin.z = \frac{\cos.z}{\cot.z}.$$

Nr. III. Die erſte Formel für den Koſinus iſt durch die Verſetzung aus der erſten für den Sinus; die zweyte auf eben dieſe Art aus der zweyten hergeleitet.

Nr. IV. Die erſte Formel für die Tangente entſteht aus der erſten für den Sinus. Die zweyte aus der für die Kotangente §. 716. Denn $\cot.\phi = \frac{r^2}{\tang.\phi}$

——— oder

$$\cot.\phi \times \tang.\phi = r^2$$

——— und

$$\tang.\phi = \frac{r^2}{\cot.\phi}$$

——— und $\phi = z$ $r = 1$

$$\tang.z = \frac{1}{\cot.z}.$$

Nr. V. Die erſte Formel für die Kotangente fließt aus der zweyten für den Sinus. Die zweyte aus der $\tang.z = \frac{1}{\cot.z}$ durch die Multiplikation und Diviſion.

Nr. VI. Iſt ſchon §. 718. erwieſen worden, nur daß die zwey Verhältniſſe verſetzet werden.

§. 721. **Lehrſatz.** Das Quadrat des Radius, oder $(\cos.\phi)^2 + (\sin.\phi)^2$ iſt das Produkt von zween unmöglichen Faktoren, deren einer der Koſ. plus das Produkt des Sin. in die Quadratwurzel aus minus eins, der andere Koſ. minus dem Produkt vom Sin. in die Quadratwurzel aus minus eins iſt.

Satz.

$$r^2 = (\cos.\phi + \sin.\phi\sqrt{-1}) . (\cos.\phi - \sin.\phi\sqrt{-1})$$

Beweis.

$r^2 = (\cos.\phi)^2 + (\sin.\phi)^2$ nach §. 700.

$$(\cos.\phi)^2 + (\sin.\phi)^2 = \cos.\phi + \sin.\phi\sqrt{-1}$$

$$\cos.\phi - \sin.\phi\sqrt{-1}$$

multipl. mit denn wenn man wirklich mult. ſo iſt

$$(\cos.\phi)^2 + \cos.\phi\sin.\phi\sqrt{-1}$$

$$- \cos.\phi\sin.\phi\sqrt{-1} - (\sin.\phi)^2 - 1$$

d. i. $(\cos.\phi)^2 - (\sin.\phi)^2 - 1$

Aber $-(\sin.\phi)^2 - 1 = +(\sin.\phi)^2$ nach §. 143.

$$(\cos.\phi)^2 + (\sin.\phi)^2 = (\cos.\phi + \sin.\phi\sqrt{-1}) \times (\cos.\phi - \sin.\phi\sqrt{-1})$$

folgl. $r^2 = (\cos.\phi + \sin.\phi\sqrt{-1}) . (\cos.\phi - \sin.\phi\sqrt{-1})$

§. 722. **Zuſatz.** Zween unmögliche Faktoren können alſo ein mögliches und reelles Produkt geben.

§. 723. **Zuſatz.** Wenn man mit dem Quadrat des Radius dividirt, ſo iſt

$$1 = \frac{(\cos\phi + \sin.\phi\sqrt{-1}}{r} . \frac{(\cos.\phi - \sin.\phi\sqrt{-1})}{r}$$

§. 724. **Zuſatz.** r fällt ganz weg, wenn der Radius = 1 geſetzt wird; ferner iſt der obige Ausdruck allemal einem völligen Quadrate gleich, oder zween Quadraten, die ſich verwandeln laſſen.

§. 725.

§. 725. **Anmerk.** Dieſer Lehrſatz iſt im folgenden ungemein fruchtbar, und hat ſeinen Nutzen auch in der höhern Geometrie, man muß ihn ſich daher wohl bekannt machen. Man ſieht zugleich, was die eingebildete oder unmögliche Wurzeln, davon wir oben gehandelt, in ſchicklicher Zerfällung der Faktoren für einen Nutzen haben.

Allgemeine Theorie der trigonometriſchen Rechnung.

§. 726. **Lehrſatz.** In einem jeden geradelinigten Dreyecke verhalten ſich die Seiten, wie die Sinus der ihnen opponirten Winkel; und umgekehrt. Denn es ſey *Fig.* 87. das Dreyeck ABC gegeben; man beſchreibe einen Zirkel darum, weil ſich um ein jedes Dreyeck ein Zirkel beſchreiben läßt nach §. 555. ſo werden die abgeſchnittene Zirkelbögen AEB, BFC u. ſ. w. das doppelte Maaß der entſtehenden Winkel C, A ſeyn nach §. 478. folglich die halben Bögen das Maaß der ganzen Winkel; der halben Bögen Sinus aber ſind die halbe Chorden, oder die halbe Seiten, die den Winkel opponirt ſind, nach §. 687. Daher der Beweis leicht iſt:

Satz. *Fig.* 87.

$\sin. c : AB = \sin. A : BC.$

Beweis.

$\sin. c = \frac{1}{2} AB;\ \sin. A = \frac{1}{2} BC$ nach §. 687. folglich

$\sin. c : \frac{1}{2} AB = \sin. A : \frac{1}{2} BC$ und verſetzt

$\sin. c : \sin. A = \frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} BC$

$\overline{}\ .2$

$\sin. c : \sin. A = AB : BC.$

§. 727. **Zuſatz.** Eben ſo beweiſet man es vom dritten Winkel, daß $\sin. B : \sin. A = AC : BC$; daher der Lehrſatz allgemein iſt.

§. 728.

§. 728. **Lehrſatz.** Alle trigonometriſchen Linien, das iſt, Sinus, Koſinus, Tangenten, Kotangenten, u. ſ. w. verhalten ſich bey ähnlichen Bögen wie die Radii. Denn *Fig.* 86. iſt Cd : de = CD : DE; nun ſind Cd, CD Radii, der eine ſey r, der andere R, die andere zwo Linien ſind die Sinus der ähnlichen Bögen DA, da; folglich de : r = DE : R, oder de : DE = r : R. Eben ſo wird der Beweis bey den übrigen trigonometriſchen Linien geführt.

§. 729. **Lehrſatz.** In einem jeden geradelinigten Dreyecke kann von einer angenommenen Spitze eine gerade Linie unter beliebigem Winkel auf die Grundlinie herabgezogen werden, alsdann verhalten ſich die Abſchnitte der Grundlinie durch die korreſpondirenden Seiten dividirt, wie die Sinus der opponirten neu entſtandenen Winkel. Denn es werde *Fig.* 88. α aus der Spitze E die Linie ED unter was für einen Winkel man will, auf AB gezogen, ſo iſt folgender Satz zu erweiſen.

Satz. *Fig.* 88. α.

$$\sin o : \sin s = \frac{AD}{AE} : \frac{DB}{EB}$$

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l}\sin o : \sin n = AD : AE \\ \sin m : \sin s = EB : DB\end{array}\right\} \text{§. 726.}$$

$$\sin o \times \sin m : \sin s \times \sin n = AD . EB : AE . DB.$$

$\sin m = \sin n$ nach §. 689. folglich ſubſtituirt

$$\sin o \times \sin n : \sin s \times \sin n = AD . EB : AE . DB$$

———————— : ſin. n.

$$\sin o : \sin s = AD . EB : AE . DB$$

———————— : AE

=

$$= \frac{\frac{AD \cdot EB}{AE} : DB}{} : EB$$

$$= \frac{AD}{AE} : \frac{DB}{EB} \text{ Alſo}$$

$$\text{ſin. } o : \text{ſin. } s = \frac{AD}{AE} : \frac{DB}{EB}$$

§. 730. **Zuſatz.** Man könnte den Satz auch ſo ausdrücken, die Sinus ſind in dieſem Falle, unter den Bedingungen §. 729. in ratione directa Segmentorum Baſis, und inverſa laterum.

§. 731. **Lehrſatz.** Wenn in einem gleichſchenklichten Dreyecke der Winkel am Scheitel, oder an der obern Spitze in zween gleiche getheilt, und von dem Theilungspunkt eine gerade Linie auf die Grundlinie gezogen wird, ſo wird

I. Der Sinus des halbirten Winkels die halbe Grundlinie durch die eine Seite dividirt,

II. Eine jede Seite die halbe Grundlinie durch den Sinus des halben Winkels dividirt; und

III. Die halbe Grundlinie das Produkt einer Seite in den Sinus des halben Winkels ſeyn, wenn der Sinus totus oder Radius = 1; wir wollen ihn aber mehrerer Deutlichkeit halben im Beweis r ſetzen, den Winkel u, folglich den Sinus des halben Winkels Sin. $\frac{1}{2}$u nennen. Die Baſis heiſſe b, die Seite a; ſo iſt nach *Fig.* 88. β.

I. Satz. *Fig.* 88. β.

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}b \,.\, r}{a} = \frac{br}{2a}$$

Beweis.

$\triangle LMN$ iſt gleichſchenklicht nach der Vorausſetzung; folgl. da auch $o = n = \frac{1}{2}u$; nach der Vorausſetzung, ſo iſt, $LP = PN = \frac{1}{2}LN = \frac{1}{2}b$. und bey P rechte Winkel, daher $LM : LP = \text{ſin. tot.} : \text{ſin.}\,n$ das iſt in Buchſtaben $a : \frac{1}{2}b = r : \text{ſin.}\frac{1}{2}u$ folglich $\frac{\frac{1}{2}b.r}{a} = \frac{br}{2a} = \text{ſin.}\frac{1}{2}u$. und wenn $r = 1$, ſo iſt $\frac{b}{2a} = \text{ſin.}\frac{1}{2}u$.

II. Satz. $a = \frac{r\,.\,\frac{1}{2}b}{\text{ſin.}\frac{1}{2}u} = \frac{br}{2\text{ſin.}\frac{1}{2}u}$

Beweis.

$\text{ſin.}\,n : LP = \text{ſin. tot.} : LM$ das iſt in Buchſtaben
$\text{ſin.}\frac{1}{2}u : \frac{1}{2}b = r : a = \frac{\frac{1}{2}b\,.\,r}{\text{ſin.}\frac{1}{2}u} = \frac{br}{2\text{ſin.}\frac{1}{2}u}$

III. Satz. $\frac{1}{2}b = \frac{a\,.\,\text{ſin.}\frac{1}{2}u}{r}$

Beweis.

$\text{ſin. tot.} : LM = \text{ſin.}\,n : LP$ das iſt in Buchſtaben
$r : a = \text{ſin.}\frac{1}{2}u : \frac{1}{2}b = \frac{\text{ſin.}\frac{1}{2}u\,.\,a}{r}$

§. 732. Anmerk. Dieſe drey Formeln hat man ſich bekannt zu machen, wenn man in dem Rechnen ſchnell fortkommen will, ſie ſind wenn der Radius $= 1$, nochmalen folgende:

I. $\text{ſin.}\frac{1}{2}u = \frac{b}{2a}$; II. $a = \frac{b}{2\text{ſin.}\frac{1}{2}u}$; III. $\frac{1}{2}b = a\,.\,\text{ſin.}\frac{1}{2}u$.

oder $b = 2a\,.\,\text{ſin.}\frac{1}{2}u$.

§. 733.

§. 733. **Lehrſatz.** Die Grundlinie in dem nämlichen Dreyecke iſt gleich dem Produkt einer Seite in den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Koſinus deſſelben halben Winkels dividirt.

Satz. *Fig.* 88. *β*.

$$b = \frac{a \,.\, ſin.\, u}{cos.\, \frac{1}{2}u}$$

Beweis.

$$MP = cos.\, o$$
$$cos.\, o = cos.\, \tfrac{1}{2}u$$

$$MP = cos.\, \tfrac{1}{2}u$$
$$MP = ſin.\, N;$$ folglich

$$ſin.\, N = cos.\, \tfrac{1}{2}u.$$ Da nun

$$LN : LM = ſin.\, o+n : ſin.\, N.$$ das iſt ſubſtit.

$$b : a = ſin.\, u : cos.\, \tfrac{1}{2}u;$$ ſo iſt

$$\frac{a \,.\, ſin.\, u}{cos.\, \frac{1}{2}u} = b.$$

§. 734. Zuſatz. Weil $b = 2a \,.\, ſin.\, \frac{1}{2}u$ nach §. 732. und nach dem unmittelbar vorhergehenden §. 733. $b = \frac{a.ſin.u}{cos.\frac{1}{2}u}$, ſo giebt es folgende Rechnung:

$$b = 2a.ſin.\tfrac{1}{2}u$$
$$b = \frac{a.ſin.u}{cos.\frac{1}{2}u}$$

$$2a.\ ſin.\tfrac{1}{2}u = \frac{a\,.\,ſin.u}{cos.\frac{1}{2}u}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \,.\, cos.\tfrac{1}{2}u$$

$$2a\ .\ ſin.\tfrac{1}{2}u\,.\,cos.\tfrac{1}{2}u = a.\ ſin.u$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : a$$

$$2.ſin.\tfrac{1}{2}u\ .\ cos.\tfrac{1}{2}u = ſin.u.$$

§. 735.

§. 735. **Lehrſatz.** Das Quadrat vom Sinus des halben Winkels iſt dem halben Produkt aus dem Sinus totus oder Radius in die Differenz des Radius und Koſinus, oder welches gleichviel iſt, dem halben Produkt aus dem Radius in den Sinus verſus oder Querſinus gleich. Denn man ziehe die Linie LQ auf MN perpendikular, ſo iſt LQ der Sinus des ganzen Winkels o + n, das iſt des Winkels u, wie wir ihn bisher genannt; man nenne LQ = p, ſo iſt $p = \sin.\frac{1}{2}u$. Der Koſinus von u, näml.

MN heiſſe π; ſo iſt $MQ = \pi$, und $\pi = \cos.u$, LP der Sinus von o oder n iſt der Sinus des halben Winkels u; er heiſſe q; ſo iſt LP = q, und $q = \sin.\frac{1}{2}u$; dem zu Folge wird nach der *Fig.* 88. β. der obige Lehrſatz in den erklärten Buchſtaben der folgende ſeyn:

Satz. *Fig.* 88. β.

$$q^2 = \frac{(r-\pi)r}{2}$$

Beweis. (*)

RM : MQ = LO : OQ wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke LRQ und MOQ

RM = LM weil o = n nach §. 533.

LM : MQ = LO : OQ oder invertendo

MQ : LM = OQ : LO und addendo

MQ + LM : LM = OQ + LO : LO

OQ + LO = LQ in der Figur Nr. I.

(*) Man verlängere NM, und ziehe LR parallel mit MP; ſo wird RM = LM, und das ΔLRM gleichſchenklicht; denn es verhält ſich wegen der Aehnlichkeit der ΔΔMPN und NRL

LN : LP = RN : NM; es iſt aber aus §. 731.

$\frac{1}{2}$LN = LP; alſo auch

MN = $\frac{1}{2}$RN

--- Aber

MN = ML

--- alſo auch

LM = $\frac{1}{2}$RN = RM.

N. I. $MQ + LM : LM = LQ : LO$ d. i. in Buchſtaben, wo für den Radius $LM = r$ geſetzt wird,

$$r + \pi : r = p : \frac{rp}{r + \pi} = LO$$

Es iſt ferner

$\triangle LPO \sim \triangle LQN$ weil P und Q rechte, und der Winkel bey L gemeinſchäftlich iſt:

daher $LQ : LN = LP : LO$ d. i. in Buchſtaben, weil $LN = 2LP = 2q$.
Nr. II.

$$p : 2q = q : \frac{2q^2}{p} = LO.$$

Nun iſt nach Nr. I. auch $\frac{rp}{r + \pi} = LO$

folglich

$$\frac{2q^2}{p} = \frac{rp}{r + \pi} \quad \cdot p$$

$$2q^2 = \frac{rp^2}{r + \pi} \quad : 2$$

$$q^2 = \frac{rp^2}{2(r + \pi)}$$

Man multiplizire des Bruches Zähler und Nenner mit $r - \pi$, ſo bleibt er unverändert nach §. 56.

$$q^2 = \frac{rp^2(r - \pi)}{2(r + \pi)(r - \pi)}$$

Es iſt aber $(r + \pi)(r - \pi) = r^2 - \pi^2$ nach §. 147. folglich ſubſtit.

$$q^2 = \frac{rp^2(r - \pi)}{2(r^2 - \pi^2)}$$

Es iſt aber nach §. 702. nämlich das Quadrat des Rad. min. dem Quadr. des Koſ. = dem Quadr. des Sin.,

$r^2 - \pi^2 = p^2$;

$$q^2 = \frac{rp^2(r-\pi)}{2.p^2}$$
$$q^2 = \frac{r(r-\pi)}{2}$$

der p heißt. Das iſt wenn man mit p^2 aufhebt, welches der obige Lehrſatz iſt, und alſo zu erweiſen war.

§. 736. **Zuſatz.** Weil $r - \pi$ = ſin. verſus, indem MN der Radius, und MQ der Koſinus, und NQ = MN — MQ; MN = r, MQ = π, alſo NQ = $r - \pi$ = Querſinus, nach §. 719. ſo iſt auch $q^2 = \frac{r.\text{ſin.vers.}}{2}$

§. 737. **Lehrſatz.** Wenn man zween ſolche Winkel wie u betrachtet, und beyde halbirt, ſo iſt das Produkt aus der Summe der Sinuſſe dieſer halbirten Winkel in ihre Differenz, dem halben Produkt des Radius in die Differenz ihrer Koſinuſſe gleich. Denn es ſey der andere Winkel w, ſein Sinus heiſſe 1, oder ſin. w = 1, cos. w = λ, und ſin. $\frac{1}{2}$w = t; ſo wird, wie oben §. 735. ſeyn $t = \frac{r(r-\lambda)}{2}$; und der Lehrſatz in Buchſtaben folgender maſſen ausgedrückt werden:

Satz. *Fig.* 88. β.

$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}u + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}w)\ (\text{ſin.}\tfrac{1}{2}u - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}w) = \frac{r(\cos.w - \cos.u)}{2}$$

Beweis.

Es iſt nach §. 735. $q^2 = \frac{r(r-\pi)}{2}$

alſo auf ſolche Weiſe $t^2 = \frac{r(r-\lambda)}{2}$

————————————————— ſubtr.

folgl. $q^2 - t^2 = \frac{r(r-\pi)}{2} - \frac{r(r-\lambda)}{2}$ oder wirkl. die Produkte durch die Multiplikation hin-

=

$$= \frac{(r^2 - r\pi)}{2} - \frac{(r^2 - r\lambda)}{2}$$ geſetzt, d. i. nach §. 140.

$$= \frac{r^2 - r\pi - r^2 + r\lambda}{2},$$ und was ſich aufhebt, nämlich $r^2 - r^2$ aufgehoben, und

$$= \frac{r\lambda - r\pi}{2} = \frac{r(\lambda - \pi)}{2}$$ in der Bedeutung der Buchſtaben λ und π

$$q^2 - t^2 = \frac{r(\cos.w - \cos.u}{2}$$ Es iſt ferner nach der Bedeutung der Buchſtaben q und t

$$q^2 - t^2 = (\text{ſin}.\tfrac{1}{2}u)^2 - (\text{ſin}.\tfrac{1}{2}w)^2$$ Aber es iſt nach §. 147.

$$(\text{ſin}.\tfrac{1}{2}u)^2 - (\text{ſin}.\tfrac{1}{2}w)^2 = (\text{ſin}.\tfrac{1}{2}u + \text{ſin}.\tfrac{1}{2}w).$$

$$(\text{ſin}.\tfrac{1}{2}u - \text{ſin}.\tfrac{1}{2}w)$$ folglich

$$(\text{ſin}.\tfrac{1}{2}u + \text{ſin}.\tfrac{1}{2}w)\ (\text{ſin}.\tfrac{1}{2}u - \text{ſin}.1w) = \frac{r(\cos.w - \cos.u)}{2}$$

§. 738. Zuſatz. Wenn der Winkel w kleiner iſt als u, wie er im Beweis angenommen wurde, ſo iſt ſein Koſinus gröſſer als der Koſinus des gröſſern Winkels, nach §. 703. daher die Differenz der Koſinuſſe ſo zu verſtehen, daß der Koſinus des gröſſern vom Koſinus des kleinern abgezogen wird; ſonſt würde die Differenz und alſo auch das Produkt negativ. Es heißt daher nicht $\frac{r(\cos.u - \cos.w)}{2}$, ſondern umgekehrt $r(\cos.w - \cos.u)$; wenn gleich der Winkel w kleiner als u iſt.

§. 739. Anmerk. Dieſe Lehrſätze ſind ungemein fruchtbar, ungeachtet ſie in den meiſten mathematiſchen Handbüchern, beſonders die nicht ganz neu ſind, vermißt werden; aber eben deßwegen hat man ſich deſto genauer mit ihnen bekannt zu machen.

Die Erfindung der Sinuſſe von den Summen und Differenzen der Bögen, aus den gegebenen Sinuſſen, und andern trigonometriſchen Linien.

§. 740. **Lehrſatz.** Wenn die Sinus zweyer Bögen gegeben ſind, ſo kann man den Sinus ihres Unterſchieds finden; er iſt nämlich das Produkt aus dem Koſinus des einen in den Sinus der Summe, weniger dem Produkt vom Sinus des andern in den Koſinus der Summe gleich, wenn der Radius eins iſt, oder wenn er = r, ſo wird dieſe Differenz durch den Radius dividirt. Es ſey in der *Fig.* 95. CA der Radius = r, die Bögen AB, BD, und ihre Summe AD, der Sinus von AB iſt BE, der von BD iſt DG, und der von AD iſt DF, nun ſey

BE = m, und ſein cos. CE = μ
DG = d cos.GC = δ
DF = s cos.FC = σ; ſo iſt in Buchſtaben der obige Lehrſatz alſo ausgedrückt:

Satz. *Fig.* 95.

$$\frac{\mu s - m\sigma}{r} = d = DG.$$

Beweis.

Nr. I. CE : EB = CF : FI, das iſt in Buchſtaben
$\mu : m = \sigma : FI$; alſo $FI = \frac{m\sigma}{\mu}$
CE : CB = CF : CI
$\mu : r = \sigma : CI$, alſo $CI = \frac{r\sigma}{\mu}$

Es iſt ferner DI = DF — FI, das iſt in Buchſtaben

Nr. II. $DI = s - \frac{m\sigma}{\mu}$, wenn es und unter einerley Benennung

$$DI = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu}$$; weiter iſt

Nr. III. $\triangle DGI \backsim \triangle IFC$, weil G und F rechte, und bey I Vertikalwinkel, folglich

CI : FC = DI : DG. d. i. nach den gefundenen Ausdrücken Nr. I. u. II.

$\frac{r\sigma}{\mu} : \sigma = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} : \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \sigma : \frac{r\sigma}{\mu} = DG$ Wenn man nun dieſen Ausdruck wirklich multipl. und dividirt, nach §. 156. und wenn man richtig aufhebt, ſo iſt

$$DG = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \frac{\sigma . \mu}{r\sigma} = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \frac{\mu\sigma}{r\sigma} = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \frac{\mu}{r}$$

$$= \frac{\mu\mu s - \mu m\sigma}{\mu r} = \frac{\mu s - m\sigma}{r} = d = DG.$$ wie oben.

§. 741. Zuſatz. Wenn der Radius $= 1$, ſo iſt die Differenz $d = \mu s - m\sigma$.

§. 742. Lehrſatz. Aus den Sinuſſen zweyer Bögen kann man auch den Sinus der Summe dieſer Bögen finden. Er iſt nämlich, wenn die Buchſtaben bleiben wie vorhin,

Satz. *Fig.* 95.

$$\frac{\mu d + \delta m}{r} = s = DF.$$

Beweis.

CF : CI = DG : DI und in Buchſtaben und gefundenen Ausdruck §. 740.

$\sigma : \frac{r\sigma}{\mu} = d : \frac{r\sigma d}{\mu\sigma} = \frac{rd}{\mu}$; alſo $DI = \frac{rd}{\mu}$

$CF : FI = DG : GI$
$CF : FI = CE : EB$

$CE : EB = DG : GI$
$\mu : m = d : \frac{dm}{\mu}$, alſo $GI = \frac{dm}{\mu}$

Ferner

$CI = CG - GI.$ das iſt
$CI = \delta - \frac{dm}{\mu} = \frac{\mu\delta - md}{\mu}$, alſo $CI = \frac{\mu\delta - md}{\mu}$

$CB : BE = CI : IF$
$r : m = \frac{\mu\delta - md}{\mu} : \frac{m\mu\delta - mmd}{\mu r}$; alſo $IF = \frac{m\mu\delta - mmd}{\mu r}$

$DF = DI + IF$ oder nach den gefundenen Ausdrücken
$DF = \frac{rd}{\mu} + \frac{\mu m\delta - mmd}{r\mu}$, und unter einerley Benennung,

$DF = \frac{rrd\mu + \mu\mu m\delta - \mu mmd}{r\mu\mu}$, und mit μ oben und unten aufgehoben, und ſchicklicher ausgedrückt

$DF = \frac{rrd + \mu m\delta - mmd}{r\mu}$

$DF = \frac{(rr - mm)d + \mu m\delta}{r\mu}$

Es iſt aber $rr - mm = \mu\mu$ nach §. 700., dieſes ſubſtituirt giebt

$DF = \frac{\mu\mu d + \mu m\delta}{r\mu}$, und durch μ oben und unten aufgehoben, giebt

DF

$DF = \frac{\mu d + m\delta}{r} = s.$, welches der oben zu erweiſende Lehrſatz war.

§. 743. **Zuſatz.** Iſt $r = 1$, ſo iſt $s = DF = \mu d + m\delta$.

§. 744. **Zuſatz.** Wenn man den Lehrſatz nach der Bedeutung der Buchſtaben ausdrückt, und die zween Bögen x und y nennt, ſo iſt $\text{ſin.}(x + y) = (\text{cos.}\,x \,.\, \text{ſin.}\,y + \text{ſin.}\,x \,.\, \text{cos.}\,y)$.

§. 745. **Zuſatz.** Wenn $x = y$. ſo iſt $\text{ſin.}(x + y) = \text{ſin.}\,2x = (\text{cos.}\,x \,.\, \text{ſin.}\,x + \text{ſin.}\,x \,.\, \text{cos.}\,x) = 2(\text{ſin.}\,x \,.\, \text{cos.}\,x)$.

§. 746. **Lehrſatz.** Der Koſinus von der Summe zweyer Bögen, iſt gleich dem Produkt der beyden Koſinuſſe, weniger dem Produkt der beyden Sinuſſe der einzelnen Bögen. Denn man ziehe *Fig.* 94. welche wie die 95. iſt, noch aus dem Punkt G, die Linie GK mit AF parallel, und fälle aus G die Perpendikularlinie GH auf AC herab, ſo iſt der Satz bald erwieſen.

Satz. *Fig.* 94.

$$(\text{cos.}\,x \,.\, \text{cos.}\,y) - (\text{ſin.}\,x \,.\, \text{ſin.}\,y) = \text{cos.}\,x + y.$$

Beweis.

Nr. I. CB : CE = CG : CH. Das iſt im Werth dieſer Linien
$1 : \text{cos.}\,x = \text{cos.}\,y : CH$; alſo $CH = (\text{cos}\,x \,.\, \text{cos.}\,y)$
Weil ferner $\triangle DGK \sim \triangle IGK \sim \triangle ICF \sim \triangle BCE$, §. 532.
ſo iſt CB : BE = DG : GK, d. i. im Werth der Linien
$1 : \text{ſin.}\,x = \text{ſin.}\,y : GK$; alſo $GK = (\text{ſin.}\,x \,.\, \text{ſin.}\,y)$

Weiter iſt $\cos.(x+y) = CF = CH - FH = CH - GK$.
Aber $CH - GK = (\cos.x . \cos.y) - (\text{ſin}.x . \text{ſin}.y)$

$$\cos.(x+y) = (\cos.x . \cos.y) - (\text{ſin}.x . \text{ſin}.y).$$

§. 747. **Zuſatz.** Wenn $x = y$, ſo iſt $\cos 2x = (\cos.x)^2 - (\text{ſin}.y)^2$.

§. 748. **Zuſatz.** Ferner iſt kraft des unmittelbaren Gegenſatzes $\cos.(x-y) = (\cos.x . \cos.y) + (\text{ſin}.x . \text{ſin}.y)$ wie auch aus §. 740. erhellet.

§. 749. **Zuſatz.** Wenn $x = y$, ſo iſt $\cos.(x-x) = \cos.0 = (\cos.x)^2 + (\text{ſin}.x)^2 = 1$. nach §. 720. daher auch aus dieſer Folge die Richtigkeit des obigen Zuſatzes §. 748. erhellet.

§. 750. **Zuſatz.** Weil die $\tang.x = \frac{\text{ſin}.x}{\cos.x}$ ſo iſt auch $\tang.(x+y) = \frac{\text{ſin}.(x+y)}{\cos.(x+y)}$; folglich wenn man obige Werthe ſubſtituirt $\tang.(x+y) = \frac{(\text{ſin}.x . \cos.y) + (\cos.x . \text{ſin}.y)}{(\cos.x . \cos.y) - (\text{ſin}.x . \text{ſin}.y)}$.

§. 751. **Lehrſatz.** Der Koſinus des Bogen x, mit ſeinem durch $\sqrt{-1}$ multiplizirten Sinus, zur Dignität n erhoben, und durch den Radius in der Dignität n dividirt, iſt der durch den Radius dividirten Summe des Koſinus vom $n$fachen Bogen, und des mit $\sqrt{-1}$ multiplizirten Sinus dieſes $n$fachen Bogens gleich.

$$\frac{(\cos.x + \text{ſin}.x\sqrt{-1})^n}{1^n} = \frac{\cos.nx + \text{ſin}.nx\sqrt{-1}}{1}$$

Be

Beweis.

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})}{r}\frac{(\cos.x-\sin.x.\sqrt{-1})}{r}=1$, nach §.723.

Man ſetze für den zweyten Faktor, $\frac{(\cos.y+\sin.y\sqrt{-1})}{r}$ ſo iſt

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})(\cos y+\sin.y\sqrt{-1})}{rr}=$ wenn man wirkl. multipl.

$=\frac{(\cos.x.\cos.y-\sin.x.\sin.y)}{rr}+\frac{(\cos.x.\sin.y+\sin.x.\cos.y)}{rr}\sqrt{-1}$

(denn $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$ mit dieſem das Produkt der Koeffizienten multiplizirt — ſin. x . ſin. y giebt) Aber

$\frac{\cos.x.\cos.y-\sin x.\sin.y}{r}=\cos.(x+y)$ nach §. 746. und

$\frac{(\cos.x.\sin.y+\sin.x.\cos.y)}{r}=\sin.(x+y)$ nach §. 744.

folglich

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})\;(\cos.y+\sin.y\sqrt{-1})}{rr}$

$=\frac{\cos.(x+y)+(\sin.x+y)\sqrt{-1}.}{r}$

Es ſey x = y; ſo iſt

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})\;(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})}{rr}$

$=\frac{\cos.2x+\sin.2x\sqrt{-1}}{r}$ Das iſt

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})^2}{rr}=\frac{\cos.2x+\sin.2x\sqrt{-1}}{r}$; und

 (cos.

$\frac{(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})^3}{rrr} = \frac{\cos.3x+\sin.3x\sqrt{-1}}{r}$; u. allgemein

$$\frac{(\cos.x+\sin x\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos.nx+\sin.nx\sqrt{-1}}{r}.$$

§. 752. Zuſatz. Weil die Rechnung bey negativen Zeichen eben dieſe Regeln befolgt, ſo wird aus gleichem Grund $(\cos.x - \sin.x\sqrt{-1})\ (\cos.y-\sin.y\sqrt{-1}) = \cos.(y+x)-\sin.(y+x)\sqrt{-1}$; alſo iſt $\frac{(\cos.x\pm\sin x\sqrt{-1})^2}{r^2}$

$= \frac{\cos.2x \pm \sin.2x\sqrt{-1}}{r}$. Und allgemein

$$\frac{(\cos.x \pm \sin.x\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos.nx \pm \sin.nx\sqrt{-1}}{r},$$

Eine allgemeine und fruchtbare Formel, wo der Exponent n, nach der Vorausſetzung, eine ganze Zahl iſt.

§. 753. Zuſatz. Wenn alſo z einen Bogen bedeutet, ſo kann der Sinus von dem nfachen Bogen oder ſin.nz bald gefunden werden. Denn es iſt

$$\frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos.nz+\sin.nz\sqrt{-1}}{r}$$

$$\frac{(\cos.z-\sin z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos.nz-\sin.nz\sqrt{-1}}{r}$$

ſubtrah.

$$\frac{\frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n-(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{2\sin.nz\sqrt{-1}}{r}}{}, r$$

(cos.

$$\frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n-(\cos.z-\sin.z\sqrt{1})^n}{r^{n-1}}=2\sin.nz\sqrt{-1} \text{ nach §. 175.(*)}$$

$$: 2\sqrt{-1}$$

$$\frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n-(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}\sqrt{-1}}=\sin.nz.$$

§. 754. **Zuſatz.** Eben ſo wird, wenn man, was oben ſubtrahirt war, addirt, und die Summe durch r beyderſeits multiplizirt, und mit 2 dividirt, der

$$\cos.nz = \frac{(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n+(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}}$$

gefunden; woraus ſich kraft des binomiſchen Lehrſatzes der ſin. und cos. nz durch eine unendliche Reihe, und wenn er durch eine ganze Zahl beſtimmt wird, in endlichen Ausdrücken finden läßt. Wir werden davon in dem vierten Hauptſtücke noch was melden.

Die

(*) Denn es wird:

$$(\cos.z+\sin.z\sqrt{-1})^n-(\cos.z-\sin.z\sqrt{-1})^n.\frac{r}{r^n}=$$

$$(2\sin.nz\sqrt{-1}).\frac{r}{r}.$$

Es iſt aber $\frac{r}{r^n}=\frac{1}{r^{n-1}}$, wenn man den Bruch mit r aufhebt, und $\frac{r}{r}=1$; mithin kömmt der oben gegebene Ausdruck heraus.

Die Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreyecks aus drey gegebenen Stücken, eine Seite mit darunter gerechnet.

§. 755. **Lehrſatz.** In einem jeden ungleichſeitigen Dreyeck läßt ſich aus zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel die dritte Seite durch Rechnung beſtimmen. Denn es ſey *Fig.* 87. im Dreyeck ABC, AB und AC nebſt dem Winkel A gegeben, man ſuche BC. Um die Erfindung allgemein und wegen dem folgenden deſto fruchtbarer zu machen, wollen wir hier nicht die längſt bekannte Auflöſung allein anbringen, ſondern durch die Buchſtabenrechnung aus der Natur der trigonometriſchen Linien die Sache erweiſen. Es ſey

$AB = a$, $\quad \sin. A = p$; $\cos. A = \pi$
$AC = b$ $\quad \sin. B = m \quad \cos. B = \mu$
$BC = c$

Satz. *Fig.* 87.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\pi}.$$

Beweis.

$BCA = 180° - (A+B)$ §. 464.
$\sin. BCA = \sin. BCK$ §. 688.
$\sin. BCK = \sin. (A+B)$

$\sin. BCA = \sin. (A+B)$
$\sin. (A+B) = m\pi + \mu p$, nach §. 742.
Nr. I. Wenn man die hier vorkommenden Buchſtaben ſubſtit.

$\sin. BCA$ oder $\sin. C = m\pi + \mu p$. Es iſt ferner
$BC : \sin. A = AB : \sin. C$ nach §. 726. und in Buchſt.
$c : p = a : \frac{ap}{c} = \sin. C$; aber nach Nr. I.

Nr. II.

$$m\pi + \mu p = \text{ſin.}C$$

Nr. II. $\frac{ap}{c} = m\pi + \mu p.$

Weiter iſt

BC : ſin. A = AC : ſin. B §. 726. oder in Buchſtaben

Nr. III. $c : p = b : \frac{bp}{c} = \text{ſin.}B = m.$

Nun iſt $(\cos,B)^2 = \mu^2 1 - (\text{ſin.}B)^2$ §. 700.

und im Werth von ſin.B

$$= 1 - \frac{b^2p^2}{c^2}$$ und unter einerley Benennung gebracht

$$= \frac{c^2 - b^2p^2}{c^2}$$ Alſo

Nr. IV. $\cos.B = \frac{\sqrt{(c^2 - b^2p^2)}}{c}$

Wenn man nun ſubſtituirt, ſo iſt, weil

nach Nr. I. $\text{ſin.}C = m\pi + \mu p = \frac{bp\pi}{c} + \frac{p\sqrt{(c^2 - b^2p^2)}}{c}$

nach Nr. III. IV.

Aber $m\pi + \mu p = \frac{ap}{c}$ nach nr. II.

folglich

$$\frac{bp\pi}{c} + \frac{p\sqrt{(c^2 - b^2p^2)}}{c} = \frac{ap}{c}$$

$$\cdot c$$

$$bp\pi + p\sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = ap$$

$$: p$$

$$b\pi + \sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = a$$

$$b\pi \quad = b\pi \qquad \text{ſubtr.}$$

$$\sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = a - b\pi;$$ und quadrirt

c²

$$c^2 - b^2p^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2\pi^2$$
$$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2\pi^2$$
$$\pi^2 = 1 - p^2 \quad \text{§. 700.}$$

$$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2(1 - p^2) \quad \text{d. i.}$$
$$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2 - p^2b^2$$
$$p^2b^2 \quad = \quad p^2b^2 \quad \text{add.}$$

$$c^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2 \quad \text{folglich}$$
$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\pi)}$$

§. 756. **Zuſatz.** Aus drey gegebenen Seiten werden die Winkel beſtimmt. Denn es ſey alles wie vorhin; ſo giebt es folgende Rechnung.

$a^2 + b^2 - 2ab\pi = c^2$; und $2ab\pi$ herübergeſetzt und c^2 hinüber

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\pi$$
$$: 2ab$$

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pi$; und beyderſeits 1 addirt

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{2ab} = 1 + \pi$. Es iſt aber

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = \frac{(a+b+c)\ (a+b-c)}{2ab} = 1 + \pi$$

Und eben ſo, wenn man ſubtr. π von 1,

$$2ab - a^2 - b^2 + c^2 = \frac{(c-a+b)\ (c+a-b)}{2ab} = 1 - \pi$$

Und aus dem beyderſeitigen Produkt die Quadratwurzel

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}} = \sqrt{(1 - \pi^2} = p;$$

Denn $1 - \pi^2 = p^2$ nach §. 700. Da man nun p^2, folglich auch p den Sinus eines Winkels aus den drey Seiten gefunden, ſo hat man den Winkel, und kann die übrige Winkel leicht finden.

§. 757.

§. 757. **Lehrſatz.** Aus einer Seite und zween Winkeln, oder aus zwo Seiten und einem Winkel, der aber nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, laſſen ſich nach §. 726. leicht die übrigen Stücke beſtimmen. Denn es ſey *Fig.* 90. AC, A und B gegeben; ſo verhält ſich

Nr. I. $\text{ſin. B} : AC = \text{ſin. A} : BC = \frac{AC . \text{ſin. A}}{\text{ſin B.}}$

Wenn ferner *Fig.* 91. A und C, nebſt AC gegeben ſind, ſo iſt auch aus A und C der Winkel B gegeben, nämlich $= 180° - (A + C)$ nach §. 464. folglich

Nr. II. $\left.\begin{matrix}\text{ſin. } 180. -(A+C) : AC = \\ \text{ſin. B} \; : \; AC \; = \end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{ſin. C} : AB \\ \text{ſin. A} : BC.\end{matrix}$

§. 758. **Zuſatz.** Weil der ſin. C, oder ſin. A, oder ſin. B auch dem Sinus des Nebenwinkels gleich, folglich der Sinus eines ſtumpfen und ſpitzigen Winkels ſeyn kann §. 688.; ſo muß man wiſſen, ob der geſuchte Winkel ſpitzig oder ſtumpf iſt; das iſt, ob das ungleichſeitige Dreyeck ſtumpfwinklicht oder ſpitzwinklicht iſt; ſonſt wäre die Aufgabe unbeſtimmt.

§. 759. **Lehrſatz.** In einem rechtwinklichten Dreyeck kann man aus den zwo Seiten nebſt dem eingeſchloſſenen rechten Winkel die übrigen Winkel und Seiten finden. Denn man ziehe *Fig.* 89. aus C mit dem Radius CA den Bogen AD, ſo iſt AB die Tangente von C. Folglich

CA : AB = ſin. tot. : tang. C. Wenn man C gefunden, ſo findet man die dritte Seite nach dem obigen Lehrſatz Nr. I.

§. 760. **Lehrſatz.** Aus zwo Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel eines ungleichſeitigen ſtumpfen oder ſpitzwinklichten Dreyecks kann man die übrigen Winkel und Seiten noch anders als §. 755. finden.

Denn

Denn es ſey *Fig.* 92. BC, BF nebſt dem Winkel CBF oder e gegeben, ſo wird unter den geſuchten Winkeln o + r der gröſſere, und s der kleinere ſeyn; oder umgekehrt, weil das Dreyeck ungleichſeitig, folglich kein Winkel dem andern gleich iſt: ſo wird nach §. 318. die halbe Summe plus die halbe Differenz dieſer beyden geſuchten Winkel der groſſe Winkel ſeyn. Man ſuche alſo die halbe Differenz; welches geſchieht, wenn man aus B mit dem Radius BC einen halben Zirkel beſchreibt, die Sehne CE zieht, und auf F die Seite DF mit CE parallel, welche durch die von A durch C gehende Linie AD geſchnitten und beſtimmt wird, ſo iſt CD die Tangente der halben Differenz, welche gefunden wird, weil

AF : EF = AD : CD; und die drey erſten Glieder bekannt ſind.

Beweis.

$m = (o+r)+s.$ } §. 470.
$m = o + n$ }

$(o+r)+s = o+n$

$o = n$ nach §. 439.

$(o+r)+s = 2n$

: 2

$\frac{(o+r)+s}{2} = n$

$n = s+p$ nach §. 457.

$\frac{(o+r)+s}{2} = s+p.$ Die halbe Summe der Winkel

$s = s$ der kleine geſuchte Winkel

$\frac{(o+r)+s}{2} - s = p$, und CD = tang. p.

AF . EF = AD : CD das iſt, weil AB = BC = und AD = tang. s+p = tang ſemi ſummæ der geſuchten Winkel

BF + BC : BF — BC = tang.(s + p) : tang p.

Das iſt in Worten, die Summe der zwo gegebenen Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der geſuchten Winkel zur Tangente der halben Differenz. Addirt man nun dieſe gefundene halbe Differenz zur halben Summe, ſo hat man den groſſen Winkel, und ſofort nach §. 758. die dritte Seite.

§. 761. **Lehrſatz.** Aus drey Seiten eines ungleichſeitigen Dreyecks laſſen ſich die drey Winkel finden.

Es

Es ſeyn *Fig.* 93. im Dreyeck ACB die Seiten AC, CB, AB gegeben, man beſchreibe aus dem Punkt C mit der kleinſten Seite CB, als dem Radius, einen Zirkel HBDF; man verlängere AC bis an die Peripherie des Zirkels H; ſo iſt $AH = AC + CB$, und $AF = AC - CB$, weil $CF = CB = CH =$ Radius; ferner iſt nach §. 537. $AB : AH = AF : AD$; das iſt

$$AB : AC + CB = AC - CB : AD.$$

Hat man AD gefunden, ſo hat man auch $DB = AB - AD$: man fälle von C den Perpendikel CG auf DB, ſo iſt $DG = GB$ nach §. 552. folglich $GB = \frac{1}{2}DB$. Man hat alſo im Dreyeck CBG, die Seite CB, BG und den rechten Winkel bey G; woraus man GCB und B findet nach §. 757. Eben ſo hat man im ΔCGA die Seiten AC, $AG = AD + DG$, und den rechten Winkel bey G, woraus man ACG und A findet nach §. 757.; folglich werden durch dieſe Reduktion alle Winkel gefunden.

Anwendung der trigonometriſchen Lehrſätze auf die Polygone.

§. 762. **Lehrſätze.** Die Seite eines regulären Vielecks, läßt ſich aus dem Winkel am Mittelpunkt durch Rechnung trigonometriſch beſtimmen. Sie iſt nämlich *Fig.* 67. $\frac{2AC \cdot \text{ſin.}\frac{1}{2}ACB}{r}$; oder wenn $AC = a$, $ACB = v$, und $AB = b$; ſo iſt $b = \frac{2a \cdot \text{ſin.}\frac{1}{2}v}{r}$.

Beweis.

Man theile AB durch den Perpendikel CG in zween gleiche Theile, ſo iſt $AG = GB$, und bey G rechte Winkel, $\Delta ACG = \Delta BCG$; folglich der Winkel bey C in zween gleiche Theile getheilt; daher

$r : AC = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}ACB : AG.$ d. i. in Buchſtaben

$$r : a = \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v : \frac{a \cdot \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}{r} = AG.$$

$$\cdot 2$$

$$\frac{2a \cdot \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}{r} = 2AG.$$

$$2AG = AB$$

$$\frac{2a \cdot \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}{r} = AB = b$$

§. 763. **Zuſatz.** Aus dem Ausdruck für b, läßt ſich a oder der Radius des Polygons finden; denn weil

$$\frac{2a \cdot \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v}{r} = b \quad \text{ſo iſt}$$

$$2a \cdot \text{ſin.}\tfrac{1}{2}v = rb \quad : 2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v.$$

$$a = \frac{rb}{2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}v.}$$

Das Produkt des Sinus totus in die Seite des Polygons dividirt durch den doppelten Sinus des halben Zenterwinkels iſt der Radius des Polygons.

§. 764. **Lehrſatz.** Eines jeden regulären Vielecks Fläche läßt ſich trigonometriſch berechnen, und iſt, wenn die Anzahl der Grade des Zenterwinkel n iſt, $\frac{n \cdot r \cdot \text{ſin.}v}{2}$.

Beweis.

Es bleibe alles wie vorhin, und der Perpendikel CG heiſſe e; ſo iſt

Nr. I. $\text{ſin. tot.} : AC = \text{ſin.}\,CAG : CG.$; aber
$\text{ſin.}\,CAG = \text{cos.}ACG.$

$\text{ſin. tot.} : AC = \text{cos.}ACG : CG$ d. i. in Buchſt.

$$r : a = a \cdot \text{cos.}\tfrac{1}{2}v : CG = \frac{a.\text{cos.}\tfrac{1}{2}v}{r} = e.$$

Nr.

Nr. II. $\triangle ACB = \frac{AB \cdot CG}{2}$ nach §. 516.

Das iſt, in Buchſtaben $= \frac{be}{2}$;

und im Werth von e nach Nr. I. $= \frac{ba \cdot \cos.\frac{1}{2}v}{2r}$;

und im Werth von b nach §. 762. $= \frac{2a \sin\frac{1}{2}v \cdot a \cdot \cos.\frac{1}{2}v}{2.rr}$

Aufgehoben, was ſich aufheben läßt, und ſchicklicher ausgedrückt $= \frac{a^2 \sin.\frac{1}{2}v \cdot \cos.\frac{1}{2}v}{rr}$.

Es iſt aber $\frac{2 \sin.\frac{1}{2}v \cdot \cos.\frac{1}{2}v}{r} = \sin.v$ nach §. 734.

folglich ſubſtituirt $\frac{a^2 \sin.v}{2r} = \frac{be}{2}$; iſt nun $r = a$, ſo iſt

$\frac{r.\sin.v}{2} = \frac{be}{2}$; und die ganze Fläche des

Polygons $\frac{nr.\sin.v}{2} = \frac{nbe}{2}$

§. 765. Zuſatz. Es ſey ein anders Vieleck von N Seiten; und deſſen Zenterwinkel $= V$, ſo iſt ſeine Fläche $= \frac{N.r.\sin.V.}{2}$ Man heiſſe die Fläche Q, und die vorige q; ſo iſt

$Q:q = \frac{Nr.\sin.V}{2} : \frac{nr.\sin.v}{2}$; das iſt

$Q:q = N.\sin.V : n.\sin.v \quad : \frac{r}{2}$

§. 766. Zuſatz. Wenn $V = \frac{1}{2}v$; ſo iſt nach §. 734. $\sin.v = \frac{2\sin.V.\cos.V}{r}$; folglich in dieſem Fall

$$q : Q = \frac{n \cdot 2\, \text{ſin}.V}{r}\cos.V : N \cdot \text{ſin}.V.$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : \text{ſin}.V$$

$$q : Q = \frac{2n \cdot \cos.V}{r} : N$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \cdot r$$

$$q : Q = 2n \cdot \cos.V : r \cdot N.$$ Aber in dieſem Fall nach §. 567.

$$2n = N$$

$$q : Q = \cos.V : r$$

Die Flächen zweyer Vielecke, davon das zweyte noch ſo viel Seiten als das erſte hat, verhalten ſich wie der Koſ. vom Zenterwinkel des Vielecks von mehreren Seiten zum Radius.

§. 767. Anmerk. Man ſieht hieraus, daß man die Polygone durch Hilfe der Trigonometrie viel genauer berechnen kann, als durch die Geometrie; wir haben daher die Lehre davon in der Geometrie aus dieſem Grunde deſto kürzer abhandeln dürfen.

Die Berechnung der Sinus und der Logarithme, nebſt dem Gebrauch der Tafeln.

§. 768. **Lehrſatz.** Unter allen in den Tafeln berechneten trigonometriſchen Linien ſind nicht mehr als drey, welche ſich genau durch Rechnung finden laſſen, nämlich Sinus totus, der Sinus von 30°, und die Tangente von 45°; die übrigen alle ſind nur beynahe wahr. Denn der Sinus totus iſt der Radius, welcher 10000 Milliontheile, als ſo viele Einheiten enthält; der Sinus von 30° iſt der halbe Radius folglich die Hälfte von den angenommenen Einheiten; und die Tangente von 45° iſt dem Radius gleich. Der erſte Satz iſt klar, die zween letztere laſſen ſich erweiſen.

I. Satz. *Fig.* 88. β.
$\text{ſinQ}.\ 30° = \frac{1}{2}r.$

Be-

Beweis.

Es ſey $LMN = 60°$; ſo iſt ΔLMN gleichſeitig.
$LMP = PMN = 30°$, und auch die $\Delta\Delta$gl.

folglich $LP = PN = \frac{1}{2}LN = \frac{1}{2}LM = \frac{1}{2}r.$
Aber $LP = \text{ſin. } 30°$

$\text{ſin. } 30° = \frac{1}{2}r.$

II. Satz. *Fig.* 89.

$\text{tang. } 45° = r.$

Beweis.

Es ſey $CBA = 45°$; ſo iſt $BA = \text{tang. } 45°$
alſo $A = 90°$; folglich auch
$CBA = 45°$: daher
ΔCBA gleichſchenklicht; und
$CA = AB$; das iſt
$r = \text{tang. } 45°.$

§. 769. Zuſatz. Weil man die übrigen Sinus nicht genau finden kann, ſo hat man den Radius in ſo viele Millionen gleicher Theile getheilt, und die übrigen Sinus, die alle kleiner ſind nach §. 693. als Brüche von ihm angeſehen, bey denen der Fehler nicht einmal ein Milliontheilchen beträgt, wenn man die obige Eintheilung annimmt; und dieß iſt ein auch bey ziemlich groſſen Zirkeln kaum merklicher Fehler.

§. 770. Anmerk. Damit man ſehe, wie man die Sinus und Koſinus aus einem einzigen Sinus finde, wollen wir die obige Formel §. 753. zu Grunde legen, als welche nach dem binomiſchen Lehrſatz: $\text{ſin.} nz = \frac{n}{1} . (\text{cos.} z)^{n-1} \text{ſin.} z - \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3}$
$(\text{cos.} z)^{n-3} \text{ſin.} z^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} (\text{cos.} z)^{n-5} (\text{ſin.} z^5$

 —

$-\ldots):r^{n-1}$; hingegen $\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}(\cos. z)^{n-2}$
$(\sin. z)^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(\cos. z)^{n-4}(\sin. z)^4 - \ldots) r^{n-1}$;
woraus ſich folgende Rechnung ergiebt, wenn
$\sin. z = s$, $\cos. z = c$

$\sin. z = s$	$\cos. z = c$.
$\sin. 2z = 2cs : r$	$\cos. 2z = (cc - ss) : r$
$\sin. 3z = (3ccs - s^3) : rr$	$\cos 3z = (c^3 - 3css) : r^2$
$\sin. 4z = (4c^3s - 4cs^3) : r^3$	$\cos. 4z = (c^4 - 6ccss + s^4) : r^3$
$\sin. 5z = (5c^3s - 10ccs^4 + s^5) : r^4$	$\cos. 5z = (c^5 - 10c^3ss + 5cs^4) : r^4$
$\sin. 6z = 6c^3s - 20c^3s^3 + 6cs^5) : rs^5$	u. ſ. w.

Wodurch begreiflich wird, wie die Sinus und andere trigonometritriſche Linien berechnet werden können (*).

§. 771. **Anmerk.** Weil *Fig.* 88. β. die Sehne $LN = 2LP = 2\sin.\frac{1}{2}u$; ſo kann man die Sehnen aller Winkel von zwey zu zwey Graden oder Minuten für einen gegebenen Radius finden; wodurch der ſogenannte geradelinigte Transporteur entſteht, auf welchen man gemeiniglich die Sehnen nur von 5 zu 5 Graden trägt, und die dazwiſchen fallende wie bey dem verjüngten Maaßſtab beynahe zu beſtimmen ſucht. Dieß gehört aber zur praktiſchen Trigonometrie.

§. 772. **Lehrſatz.** Unter allen trigonometriſchen Zahlen ſind der Sinus totus, und ſein Logarithmus, der Sinus von 30°, die Tangente von 45° und ihr Logarithmus, nebſt den Logarithmen der Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000; ſo weit ſie berechnet ſind, in den Tafeln genau, die übrigen alle aber nur beynahe wahr. Von den erſten drey Zahlen erhellet der Beweis aus §. 768. denn der Logarithme des Sinus totus und der Tangente von 45° ſind einerley; und der Sin.

(*) Die Art, wie man aus dem gegebenen Sinus des einfachen Winkels den Sinus des zweyfachen, dreyfachen u. ſ. w. Winkels finden könne, lehret Herr Clemm deutlich §. 179. II. Th. Geom. ſeiner erſten Gründe aller mathematiſchen Wiſſenſchaften. Wie man aus der Betrachtung der Linien, und ihrer Verhältniſſe auf die hier angeführte Formel komme läßt ſich ohne Figur nicht wohl erklären.

Sin. 30° iſt der halbe Radius; ſein Logarithmus iſt ſchon irrational. Von den folgenden aber ergiebt ſich der Beweis aus der in Tafeln angenommenen Progreßion, 1, 10, 100, 1000, u. ſ. w. und den Logarithmen 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. mit den angehängten Nullen wegen den Dezimalfraktionen.

§. 773. Zuſatz. Wie man die dazwiſchen fallenden Logarithmen finde, haben wir allgemein §. 309. erkläret, und können uns darauf berufen.

§. 774. Zuſatz. Der Logarithme des Sin. 0 wird unrichtig in den Tabellen = 0 geſetzt. Denn wenn dieſer Logarithme null wäre, ſo müßte der Sinus von 0 Grad = 1 ſeyn. nach §. 301. Er iſt aber nicht 1, ſonſt wäre 0° = 90°, welches widerſinniſch iſt. Folglich wird dieſer Logarithme in den Tafeln unrichtig angegeben.

§. 775. Anmerk. Was den Gebrauch der Tafeln betrift, ſo ſtehen alle Bögen, welche zuſammen 90° betragen, beyſammen, z. E. ſie fangen an auf der erſten Kolumne 9°, und gerade gegen über in der andern Kolumne 89° 60′, das giebt zuſammen 90°. Und mit 45° hören ſie auf; nämlich auf der einen Seite 44° 60′ auf der andern 45° 0′, weil 44° 60′ + 45° 0′ gerade 90° betragen. Alſo machen durchgehends zwey gegenüberſtehende Bögen in Graden zuſammen 90°; dieſe Ordnung, daß die Bögen unter 45° und ihre Komplemente oder Ergänzungen zu 90° beyſammen ſtehen, hat viele Bequemlichkeit; denn der Sinus des gegenüberſtehenden Bogens iſt der Koſinus des erſten, und umgekehrt, und die dabey ſtehenden Logarithmen ſind alſo wechſelsweiſe die Logarithme der Sinus und der Koſinus. Eben das gilt von Tangenten und Kotangenten. Nach den logarithmiſchen Tafeln der Sinus und der Tangenten folgen die Logarithmen der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen, die man braucht, wenn man eine gerade Linie in Zahlen gegeben, in die Rechnung bringt: bey dieſen Logarithmen kann man den Vortheil gebrauchen, daß man, wenn eine Linie geſucht wird, und man ſie anfänglich in Schuhen gefunden hätte, es bliebe aber noch etwas übrig, und der Logarithme korreſpondirte der gefundenen Zahl nicht genau, dieſen nämlichen Logarithmen unter der unmittelbar folgenden Karakteri-

ſtik, die das Zehnfache der vorigen iſt, aufſüche; da dann die korreſpondirende Zahl der natürlichen Zahlzeichen geometriſche Zolle geben wird, weil ein geometriſcher Schuh mit 10 multiplizirt, ſo viel geometriſche Zolle giebt; korreſpondirt die Zahl noch nicht genau, ſo ſucht man ſie in der folgenden Karakteriſtik, und bekömmt Linien. In dieſem Falle aber iſt es gut, wenn man Tafeln hat, wo die Logarithmen für die natürlichen Zahlen bis auf Millionen berechnet ſind, damit man deſto mehr Karakteriſtiken bekomme; wie in der Trigonometrie Britannika. Unerachtet dieß mehr in die praktiſchen Rechnungen gehöret, ſo wollen wir doch ein Exempel geben. Es ſey *Fig.* 90. die Linie AC gegeben in Schuhen, und zwar = 16'; der Winkel A ſey 30°, und B ſey 80°. Man ſuche BC, ſo iſt

$$\text{ſin. B} : AC = \text{ſin. A} . BC \quad \text{oder im Werth}$$
$$\text{ſin. } 30^\circ : 16 = \text{ſin. } 80^\circ : BC = \frac{16,.\text{ ſin. } 80^\circ}{\text{ſin. } 30}$$

Wenn man nun dieſes logarithmiſch berechnet, ſo erinnert man ſich, daß durch die Logarithmen die Multiplikation in eine Addition, und die Diviſion in eine Subtraktion verwandelt werde. Dem zu Folge addirt man die Logarithmen von 16' und 80° zuſammen, und ſubtrahirt von der Summe den Log. von 30°. Man ſucht ſie alſo in den Tafeln auf, und zwar den erſten in den Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen, die anderen in den Tafeln der Sinuſſe u. ſ. w.

Log. 16 =	1,2041200
Log. ſin. 80° =	9,9933515
Summe =	11.,1.9.7.4715
Log. ſin. 30° =	9,6980700
Log. BC =	1,4985015

oder die Differenz.

Dieſen Logarithmen ſchlägt man in den Tafeln der natürlichen Zahlzeichen auf, weil BC eine Seite des geradelinigten Dreyeckes iſt; welchen am nächſten korreſpondirt, 31, das iſt 31'; um aber die Sache genauer zu wiſſen, ſo ſucht man dieſen Logarithmen unter der Karakteriſtik 2, da dann am nächſten korreſpondirt 315, das ſind Zolle, alſo 31'5''; und um die Sache noch genauer zu haben, ſo ſuche man ihn auch unter der Karakteriſtik 3, dem 3152''' am näch-

ſten

ſten kommen; alſo habe ich noch 2‴, folglich iſt BC = 31′ 5″ 2‴. Wenn man weitere Karakteriſtiken hat, ſo kann man in Zehntheilchen einer Linie u. ſ. w. es noch genauer finden. Dieß Exempel wird inzwiſchen hinlänglich ſeyn, eine Anleitung zum Gebrauch der Tafeln zu geben,, bis wir in der praktiſchen Geometrie das Weitere vortragen werden (*).

(*) Wir verſprachen zwar in der Anmerkung §. 311. hier eine ausführlichere Abhandlung vom Gebrauche der Logarithmiſchen Tafeln, verweiſen aber die Leſer aus Mangel des Raumes, auf Hrn. Georg Vega's zu §. 681. angeführte Sammlung trigonometriſcher Tafeln, in deren Einleitung S. XXII. u. f. wie auch S. XLIV. u. f. deutliche Erläuterungen zum Gebrauch dieſer Tafeln gegeben ſind.

Zweytes Kapitel.

Von der ſphäriſchen Trigonometrie.

§. 776.

Erklärung.

Die ſphäriſche Trigonometrie lehret, aus drey gegebenen Stücken eines ſphäriſchen Dreyecks die drey andere durch Rechnung zu finden; die drey Stücke mögen Seiten oder Winkel, oder theils Seiten, theils Winkel ſeyn.

§. 777. **Zuſatz.** Der Grund, warum in der ſphäriſchen Trigonometrie dieſe Erklärung gegeben wird, beruhet darauf, daß die ſphäriſchen Dreyecke lauter Bögen groſſer Zirkel ſind; folglich würde ein jeder Parallelkreis mit der Grundſeite eines ſphäriſchen Dreyecks, zwar ein anderes ähnliches Dreyeck beſtimmen, aber das hieſſe kein ſphäriſches Dreyeck von der Art, wie ſie allein in der Aſtronomie betrachtet werden.

§. 778. **Anmerk.** Auſſer dem, was wir in der allgemeinen Geſchichte der Trigonometrie §. 678. folgg. vorgetragen, melden wir noch, daß die ſphäriſche Trigonometrie von Hrn. Freyh. von **Wolf** in ſeinen Elementis ſehr ausführlich und vollſtändig, und weit genauer als einige andere Wiſſenſchaften in dieſem Werk abgehandelt worden. Wie er denn auch eine kurze Regel, die noch allgemeiner iſt, als die alte Neperiſche, und nur für rechtwinklichte Dreyecke taugliche Regel war, zur Auflöſung aller ſphäriſchen Dreyecke gefunden, und in gedachten Elementis demonſtrirt hat. Unter den neuern hat beſonders Herr Prof **Ries** in einer akademiſchen Diſſertation 1758. dieſe Lehre ſo ausführlich als gründlich vorgetragen.

All-

Allgemeine Betrachtung der ſphäriſchen Dreyecke.

§. 779. **Erklär.** Wenn drey gröſte Zirkel einander ſchneiden, ſo entſtehen durch die Durchſchnittspunkte Bögen, welche die Seiten des ſphäriſchen Dreyecks ſind, und die Durchſchnittspunkte beſtimmen ſeine Winkel. Die Zirkel aber können nach §. 661. einander ſchneiden, daß jede Seite kleiner als 180° wird; von ſolchen Dreyecken iſt hier die Rede. Nämlich ein ſphäriſches Dreyeck, wie es hier betrachtet wird, beſteht erſtlich aus lauter Bögen gröſter Zirkel; zweytens aus ſolchen Bögen, deren jeder kleiner als 180° oder ein halber Zirkel iſt.

§. 780. **Zuſatz.** Daher giebt es in Rückſicht auf die Sinus und Tangenten der Seiten nicht weitere Fälle der Zweydeutigkeit, als zween; da nämlich Sinus und Tangenten zweyerley Bögen korreſpondiren können; ſie würden aber mehrern korreſpondiren, wenn man Seiten annähme, die auch gröſſer als 180° ſeyn könnten.

§. 781. **Erklär.** Ein ſphäriſches Dreyeck iſt entweder rechtwinklicht oder ſchiefwinklicht; rechtwinklicht heißt es, wenn es einen oder auch mehrere rechte Winkel hat, nach §. 674. ſchiefwinklicht, wenn alle drey ſchief ſind, und keiner davon ein rechter iſt.

§. 782. **Erklär.** In einem rechtwinklichten Dreyeck, wo ein rechter Winkel iſt, heiſſen die Seiten, welche der rechte Winkel einſchließt, die zween Perpendikel, oder die eine iſt der Perpendikel, und die andere die Grundlinie; die Seite, die dem rechten Winkel entgegen ſteht, heißt die Hypothenuſe.

§. 783. **Lehrſatz.** Wenn man von den Durchſchnittspunkten der Bögen eines ſphäriſchen Dreyecks gerade Linien

oder Radios nach dem Mittelpunkt der Kugel ziehet, ſo ſind die Seiten des ſphäriſchen Dreyecks die Maſſen der Winkel an dem Mittelpunkt der Kugel. *Fig.* 96. iſt das Dreyeck PAB gegeben, man ſuche den Mittelpunkt der Kugel K, und ziehe die Linien PK, BK, AK, ſo entſtehen ſchon die Winkel PKB = PB, PKA = PA, BKA = BA. Nach geometriſchen Gründen §. 476.

§. 784. **Lehrſatz.** Wenn man von P auf den Durchſchnitt der zwo Flächen, nämlich auf die Linie KB die Linie PN perpendikular ziehet, und eben ſo PM auf KA perpendikular, ſo iſt, wenn man M und N durch die Linie MN vereinigt, der Winkel PNM der Neigungswinkel beyder Ebenen, und dem ſphäriſchen Winkel B oder PBA gleich. Denn daß er der Neigungswinkel ſey, erhellt aus §. 598., welchen Lehrſatz wir beſonders zu merken empfohlen, auch deutlich erwieſen haben; daß er aber dem Winkel B gleich, erhellt daher, weil die Fläche PKB ſich in B gegen die Fläche KBA eben ſo neiget, wie ſie ſich in N neiget; oder weil durch die ganze Linie KB der Neigungswinkel unverrückt bleibt, die Neigung aber dieſer zwo Flächen iſt der ſphäriſche Winkel B.

§. 785. **Zuſatz.** Eben ſo iſt PMN dem Winkel A, und NPM dem Winkel P gleich.

§. 786. **Anmerk.** Wenn man von Pappendeckel eine ſolche Kugelpyramide wie KPAB zuſammen leimet, und in die Oeffnung ein hineinpaſſendes rechtwinklichtes Dreyeck, wie PMN, hineinſchiebt, ſo wird der obige Lehrſatz ſo palpabel, als der §. 598., den wir auf eine ähnliche Art erläutert haben.

§. 787. **Zuſatz.** Man kann die geraden Linien PN und PM als die Sinus der Bögen PB und PA anſehen; denn PN ſteht auf KB, und PM auf KA perpendikular; aber KA und KB ſind die Radius der Kugel; folglich iſt nach der Erklärung §. 685. PN = ſin.PB, und PM = ſin. PA.

Be-

Betrachtung und Auflöſung der rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecke.

§. 788. **Lehrſatz.** Wenn der Sinus totus = r, ſo iſt nach *Fig.* 96.

r : ſin. PB = ſin. B : PA.

Beweis.

PN : PM = r : ſin. PNM §. 726.
PNM = B

PN : PM = r : ſin. B.
PN : PM = ſin. BP : ſin. PA : §. 787.

r : ſin. B = ſin. BP : ſin. PA
r : ſin. BP = ſin. B : ſin. PA.

§. 789. **Lehrſatz.** Unter den vorigen Umſtänden iſt wiederum, wenn t die Tangente bedeutet

r : ſin. BA = t. B : t. AP.

Beweis.

MP : MN = tang. N : r nach §. 759.
N = B nach §. 784.

MP : MN = tang. B : r
KM : MP = r : tang. PA. nach §. 759.

KM : MN = tang. B : tang. PA. §. 278. Nr. III.
KM : MN = r : ſin. BA

r : ſin. BA = tang. B : tang. PA.

§. 790. **Lehrſatz.** Wie man *Fig.* 97. PB bis N und BA bis M verlängert, daß BN und BM Quadranten oder 90° werden, eben ſo verlängere man PA bis D, daß DA = 90°, und ziehe von D durch N und M den Bogen DM, ſo

ſo ſind bey M und N rechte Winkel, und D iſt der Pol von BAM; folglich

PN Complementum von BP
AM Complementum von AB
PD Complementum von PA;
ferner NM das Maaß des Winkels B,
ND Complementum NM
——————————— alſo
ND Complementum des Maaſſes von B.

Eben das gilt von den Tangenten und Kotangenten, wie es aus §. 699. erhellet.

§. 791. **Lehrſatz.** Zween ſphäriſche Vertikalwinkel ſind einander gleich.

Satz. *Fig.* 97.

BPA = DPN

Beweis.

$$\begin{array}{l} BPA + BPD = 180^\circ \\ BPD + DPN = 180^\circ \\ \hline BPA + BPD = BPD + DPN \\ \quad BPD = BPD \quad \text{ſubtr.} \\ \hline BPA = DPN. \end{array}$$

§. 792. **Lehrſatz.** r : cos. PA = cos. BA : cos. BP.

Beweis. *Fig.* 97.

r : ſin. DP = ſin. D : ſin. PN
ſin. DP = cos. PA; ſin. D = cos. BA; ſin. PN = cos. BP.
———————————
r : cos. PA = cos. BA : cos. BP.

§. 793. **Lehrſatz.** r : cos. PA = ſin. P : cos. B.

Be-

Beweis.

r : ſin. DP = ſin. P : ſin. DN.
ſin. DP = cos. PA ; ſin. DN = cos. B.

r : cos. PA = ſin. P : cos. B.

§. 794. Lehrſatz. r : cos. B = cot. BA : cot. BP.

Beweis.

r : ſin. DN = tang. D : tang. PN. §. 789.
ſin DN = cos. B

r : cos. B = tang. D : tang. PN
tang. D = cot. BA, t. PN = cot. BP.

r : cos. B = cot. BA : cot. BP.

§. 795. Lehrſatz. r : cos. BP = tang. P : cot. B.

Beweis.

r : ſin. PN = tang. P : tang. DN §. 789.
ſin. PN = cos. BP

r : cos. BP = tang. P : tang. DN
tang. DN = cot. B

r : cos. BP = tang. P : cot. B.

§. 796. Lehrſatz. r : ſin. BA = cot. AP : cot. B.

Beweis:

r : ſin. BA = tang. B : tang. AP §. 789.
tang. B : tang. AP = cot. AP : cot. B

r : ſin. BA = cot. AP : cot. B.

§. 797. Lehrſatz. r : cos. B = tang. BP : t. BA.

Beweis.

r : cos. B = cot. BA : cot. BP
cot. BA : cot. BP = t. BP : t. BA. §. 720.

r : cos. B = tang. BP : tang. BA.

§. 798.

§. 798. **Lehrſatz.** $r : \cos. BP = t. B : \cot. P.$

Beweis.

$r : \cos. BP = t. P : \cot. B.$ § 795
$t. P : \cot. B = t. B : \cot. P.$

$r : \cos. BP = \text{tang}. B : \cot. P.$

§. 799. **Lehrſatz.** $r : \cot. BP = t. BA : \cos. B.$

Beweis.

$r : t. BP = \cos. B : t. BA$
$t. BP = \frac{r^2}{\cot. BP}$ nach §. 720. ſubſtituirt giebt
$r : \frac{r^2}{\cot. BP} = \cos. B : t. BA.$
———— . cot. BP
$r . \cot. BP : r^2 = \cos. B : t. BA.$
———— : r
$\cot. BP : r = \cos. B : t. BA$; und invertendo

$r : \cot. BP = t. BA : \cos. B.$

§. 800. **Zuſatz.** Eben ſo iſt $r : \cot. B = t. AP : \text{ſin}. AB$, weil $\cot. AP = \frac{r^2}{t. AP}$ §. 720. und durch dieſe Subſtitution die Proportion aus §. 769. folgt.

§. 801. **Zuſatz.** Auf gleiche Weiſe iſt auch $r : \cot. P = \cot. B : \cos. BP$; weil $\text{tang}. B = \frac{r^2}{\cot. B}$, und die Proportion aus §. 798. durch die Subſtitution daſelbſt folgt.

§. 802. Anmerk. Dieſes ſind alle Fälle, die bey rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecken vorkommen; es ſind in allem zwölf Proportionen, davon die 6 erſten die Hauptproportionen ſind, woraus ſich alle Fragen auflöſen laſſen, und die 6 letzteren Proportionen ſind nur Folgen und ſchicklichere Ausdrücke. Um die Proportionen ſogleich zu überſehen, wollen wir ſie herſetzen:

I. r : ſin. BP = ſin. B : ſin. PA.
II. r : ſin. BA = t. B : t. AP.
III. r : cos. PA = cos. BA : cos. BP.
IV. r : cos. PA = ſin. P : cos. B.
V. r : cos. B = cot. BA:cot.BP.
VI. r : cos. BP = t. P : cot. B.

Die daraus flieſſende ſechs folgende ſind

1. r : ſin. BA = cot. AP : cot. B.
2. r : cos. B = t. BP : t. BA.
3. r : cos. BP = t. B : cot. P.
4. r : cot. BP = t. BA : cos. B.
5. r : cot. B = t. AP : ſin. AB.
6. r : cot. P = cot. B : cos. PB.

Allein die erſten ſechs ſind die Fundamentalproportionen, die man ſowohl hier, als bey den ſchiefwinklichten Dreyecken zu wiſſen nöthig hat, wenn man gründlich die Sache lernen will.

Betrachtung der Fälle, in welchen Winkel und Seiten gröſſer oder kleiner als 90 Grade werden.

§. 803. Lehrſ. Sind in einem ſphäriſchen Dreyecke einige Seiten kleiner, einige gröſſer als 90°, oder ein Quadrant, ſo ſind zwar alle Sinus poſitiv, aber die Koſinus und die Tangenten der gröſſern Bögen negativ. Denn daß die Sinus alle poſitiv ſeyn, iſt aus §. 695. verglichen mit §. 689. klar; weil nämlich jede Seite des ſphäriſchen Dreyecks $>$ 180°, und alle Sinus unter 180° poſitiv ſind; daß aber die Koſinus der Bögen über 90° negativ werden, erhellet aus §. 704., weil der Koſinus von 90° = 0, folglich die Koſinus von gröſſern Bögen das Zeichen minus haben.

Eben das gilt von den Tangenten, §. 720., weil die Tangente von 90° = ∞, folglich von da aus der Uebergang ins negative geſchieht.

§. 804. **Lehrſ.** Nennet man ein Paar Winkel und Bögen, davon jeder weniger als 90°, oder jeder mehr als 90° hält, **gleichartig**, (homogeneos); ein anders Paar, davon der eine mehr, der andere weniger als 90° hält, **ungleichartig**, (heterogeneos); ſo wird ein ſchiefer Winkel und der demſelben gegenüberſtehende Perpendikel, das iſt, die Seite, die den rechten Winkel macht, allemal gleichartig ſeyn. Dieß folgt aus §. 802. Nr. II. das iſt, aus der Proportion r : ſin. BA = t. B : t. AP. Denn ſin. BA iſt allemal poſitiv, BA mag gröſſer oder kleiner als 90° ſeyn; §. 695. daher wie t. B, ſo iſt auch t. AP: Iſt t. B negativ, ſo iſt auch t. AP negativ; das iſt, wenn B > 90°, ſo iſt auch AP > 90°.

§. 805. **Lehrſatz.** Wenn beyde Perpendikel BA, PA, gleichartig ſind, ſo iſt die Hypothenuſe < 90°; nach §. 802. Nr. III.; denn r. cos. BP kann nicht negativ ſeyn, wenn cos. BA . cos. PA poſitiv ſind; dieß Produkt aber iſt allemal poſitiv, wenn beyde Perpendikel BA und PA gleichartig ſind, das iſt, wenn beyde + oder beyde — haben. Folglich muß auch r. cos. BP poſitiv ſeyn; r iſt allzeit poſitiv; alſo muß auch cos. BP poſitiv ſeyn. Iſt aber dieß, ſo muß BP < 90° ſeyn; denn nur dieſe Koſinus ſind poſitiv.

§. 806. **Zuſatz.** Wenn alſo die Perpendikel ungleichartig ſind, ſo iſt die Hypothenuſe BP > 90°.

§. 807. **Zuſatz.** Iſt die Hypothenuſe < 90°, ſo ſind die Perpendikel gleichartig; iſt ſie gröſſer, ſo ſind ſie ungleichartig.

§. 808. **Lehrſ.** Die Hypothenuſe iſt kleiner als 90°, wenn ein Winkel mit der anliegenden Seite gleichartig iſt. Dieß folgt

folgt aus §. 802. Nr. V., wo r : cos. B = cot. BA : cot. BP. Iſt nun B und BA gleichartig, ſo iſt cos. B × cot. BA ein poſitives Produkt; folglich iſt es auch r × cot. BP; r iſt immer poſitiv; alſo muß auch cot. BP poſitiv ſeyn, oder das Zeichen + haben, ſonſt würde durch die Multiplikation ein negatives Produkt herauskommen. Iſt aber cot. BP poſitiv, ſo iſt BP < 90°; denn die cot. über 90° ſind negativ, und nur die unter 90° poſitiv.

§. 809. **Zuſatz.** Sind alſo die zwey Glieder, nämlich B und BA ungleichartig, ſo iſt die Hypothenuſe gröſſer als 90°; weil alsdann beyderſeits ein negatives Produkt herauskömmt.

§. 810. **Lehrſatz.** Ein Winkel iſt ſpitzig, wenn der andere mit der Hypothenuſe gleichartig iſt. Der Beweis folgt aus §. 802. Nr. VI., wo r : cos. BP = t. P : cot. B. Denn wenn cos. BP × t. P ein poſitives Produkt iſt, ſo iſt es auch r × cot. B; folglich muß cot. B poſitiv ſeyn; iſt aber dieſes, ſo iſt B < 90° nach §. 720.

§. 811. **Zuſatz.** Der Winkel von B iſt alſo ſtumpf oder > 90°, wenn die Hypothenuſe und der andere Winkel ungleichartig ſind.

§. 812. **Anmerk.** Es ſind einige Fälle, aber nur wenige ausgenommen, wo ſich aus den Zeichen die Beſchaffenheit der Bögen nicht beſtimmen läßt, z. E. wenn lauter Sinus vorkommen, u. ſ. w., wo man, wie in der ebenen Geometrie, einem ſagen muß, ob die Winkel ſtumpf oder ſpitzig ſeyn.

Betrachtung der ſchiefen Dreyecke.

§. 813. **Erklär.** Ein jedes ſchiefes Dreyeck läßt ſich in zwey rechtwinklichte verwandeln, wenn man von einem nach Belieben angenommenen Winkel deſſelben auf die entgegengeſetzte

ſetzte Seite, die man allenfalls verlängern darf, einen Perpendikel herabfällt, wie *Fig.* 99. 100. der Perpendikel PA aus dem ſchiefwinklichten Dreyeck zwey rechtwinklichte macht.

§. 814. **Zuſatz.** Schiefwinklichte Dreyecke laſſen ſich alſo auf rechtwinklichte reduziren, und nach den vorigen Lehrſätzen auflöſen, wenn man noch zwey Stücke in jedem rechtwinklichten Dreyeck auſſer dem rechten Winkel als gegeben erhält.

§. 815. **Zuſatz.** Man erhält dieſe zwey Stücke allemal, wenn neben zwo Seiten ein Winkel gegeben iſt; zwo Fälle ſind ausgenommen, wenn entweder drey Seiten oder drey Winkel gegeben ſind, welche Fälle wir beſonders betrachten werden.

§. 816. **Zuſatz.** Wenn in einem ſchiefwinklichten Dreyecke eine Seite ein Quadrant iſt, ſo läßt er ſich, wenn man die andere Seite in einen Quadranten verlängert, ohne weitere Reduktion, wie die rechtwinklichte Dreyecke auflöſen.

§. 817. **Lehrſatz.** Es ſeyn gegeben *Fig.* 99. 100. die Winkel B, D und die Seite DP, man kann daraus die Seite BP, und die übrigen Stücke finden.

Satz. *Fig.* 99. 100.

$\sin. B : \sin. D = \sin. DP : \sin. BP.$

Beweis.

Man fälle den Perpendikel PA auf BD herab, ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} r : \sin. B = \sin. BP : \sin. PA \\ r : \sin. D = \sin. DP : \sin. PA \end{array}\right\} \text{§. 802. Nr. I.}$$

$\sin. B : \sin. D = \sin. DP : \sin. BP$ nach §. 278.

§. 818. **Lehrſatz.** $t. B : t. D = \sin. DA : \sin. BA.$

Be-

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} r : \text{tang.} B = \text{ſin.} BA : \text{t.} PA \\ r : \text{tang.} D = \text{ſin.} DA : \text{t.} PA \end{array}\right\} \text{§. 802. Nr. II.}$$

$$\text{tang.} B : \text{tang.} D = \text{ſin.} DA : \text{ſin.} BA. \quad \text{§. 278.}$$

§. 819. Lehrſatz. $\cos. BP : \cos. BA = \cos. DP : \cos. DA$.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} \cos. PA : r = \cos. BP : \cos. BA \\ \cos. PA : r = \cos. DP : \cos. DA \end{array}\right\} \text{§. 802. Nr. III.}$$

$$\cos. BP : \cos. BA = \cos. DP : \cos. DA.$$

§. 820. Lehrſatz. $\text{ſin.} BPA : \cos. B = \text{ſin.} DPA : \cos. PDA$.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} r : \cos. PA = \text{ſin.} BPA : \cos. B \\ r : \cos. PA = \text{ſin.} DPA : \cos. PDA \end{array}\right\} \text{§. 802. Nr. IV.}$$

$$\text{ſin.} BPA : \cos. B = \text{ſin.} DPA : \cos. PDA.$$

§. 821. Lehrſatz. $\cos. BPA : \cos. DPA = \text{tang.} DP . \text{tang.} BP$.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} r : \text{tang.} BP = \cos. BPA : \text{t.} PA \\ r : \text{tang.} DP = \cos. DPA : \text{t.} PA \end{array}\right\} \text{§. 802. Nr. 2.}$$

$$\text{tang.} DP : \text{t.} BP = \cos. BPA : \cos. DPA \quad \text{§. 278.}$$
$$\cos. BPA : \cos. DPA = \text{t.} DP : \text{t.} BP.$$

§. 822. Zuſatz. Wie man nun bey den rechtwinklichten Dreyecken gröſtentheils finden kann, welche Winkel und Seiten gröſſer oder kleiner als 90°, das iſt, ſtumpf oder ſpitzig ſeyn, ſo kann man es auch hier durch die Reduktion finden; die ausführliche Beſtimmung der Fälle ſelbſt aber würde

hier zu weitläuftig ſeyn. Uebrigens merken wir noch an, daß die Koſinus und Tangenten von den innern Winkeln der reducirten rechtwinklichten Dreyecken zu verſtehen ſeyn; ſonſt würde man aus den Zeichen nichts beſtimmtes ſchlieſſen können.

Betrachtung und Auflöſung der ſchiefen Dreyecke, in welchen drey Seiten oder drey Winkel gegeben ſind.

§. 823. **Lehrſ.** Wenn man *Fig.* 98. in dem ſphäriſchen ſchiefen Dreyecke, wo die Seiten PB, PA, AB gegeben ſind, die Figur nach §. 783. zurichtet, die Sinus PQ, PN zieht, auf die Ebene KAB einen Perpendikel PM herab läßt, von M nach N die Linie MN zieht; ſo iſt MN auf KB den Durchſchnitt der beyden Ebenen KPB, KBA perpendikular, wie aus §. 598. deutlich erhellet; auch aus Kartenpapier, wie wir im angeführten Lehrſatz zeigten, leicht gewieſen werden kann; zieht man von N nach Q die Linie NQ, ſo kann man in dem ebenen Dreyeck NQK die Seite NQ aus dem Winkel NKQ und beyden Seiten NK, KQ nach §. 755. finden, ſie iſt nämlich $\sqrt{(KN^2 + KQ^2 + 2KN \times KQ. \cos. NKQ)}$; welches aus der §. 755. gefundenen Formel $\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\pi)}$ klar genug iſt, wenn man für die Buchſtaben die hier vorkommenden Seiten ſetzet. Ziehet man noch die Linie QM, ſo wird ſich auch dieſe finden laſſen, denn es wird der Winkel PMQ ein rechter ſeyn, weil PM auf die ganze Ebene KAB perpendikular ſteht, folglich alle gerade Linien durch M in dieſer Ebene mit PM rechte Winkel machen. §. 598. Demnach iſt PQ im rechtwinklichten Dreyeck PMQ die Hypothenuſe, und $PQ^2 = PM^2 + QM^2$, folglich $QM^2 = PQ^2 - PM^2$. Dieſes vorausgeſetzt, wird ſich der Winkel B oder PBA durch Rechnung finden laſſen, wenn man, um kürzer ſich ausdrücken zu können, den ſchon gemeldten Linien ihre Namen von kleinern Buchſtaben giebt. Es ſey

der

der Radius KP $= 1$.
der ſin. PB=PN $= m$.
cos. PB=KN $= \mu$.
ſin. PA=PQ $= p$.
cos. PA=KQ $= \pi$.

Endlich heiſſen die in der Figur durch Linien nicht ausgedrückte Sinus und Koſinus von AB, f und ϕ, nämlich ſin. NKQ = ſin. AB $= f$; cos. AB $= \phi$: ſo iſt nach dem ſchon genannten Lehrſatz §. 755. wenn man für die Linien Buchſtaben ſetzt:

Nr. I. $NQ = \sqrt{(\mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\phi.)}$
oder $NQ^2 = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\phi.$

Weil ferner:

QN : KQ = ſin. NKQ : ſin. KNQ §. 726.
ſin. NKQ = ſin. AB.

QN : KQ = ſin. AB : ſin KNQ; in Buchſt.
$QN : \pi = f : \frac{\pi f}{QN} =$ ſin. KNQ.

Aber ſin. KNQ = cos. MNQ; weil MNK = 90° 598.
folgl. $\frac{\pi f}{QN} =$ cos. MNQ, folgl. iſt im $\triangle$QNM aus den Seiten QN, NM, und dem cos. MNQ nach §. 726. wie Nr. I. NQ^2, alſo auch hier

Nr. II. $QM^2 = QN^2 + NM^2 - \frac{2\pi f . NM . QN}{QN}$ oder aufgehoben mit QN

$QM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f . NM.$

Es iſt ferner, wenn ſin. B, oder ſin. PBA $= x$ und der ſin. tot. $= 1$ geſetzt wird,

$PN : 1 = PM : \text{ſin.}\, PNM$
$PNM = PBA = B$ §. 784.

$PN : 1 = PM : \text{ſin.}\, B.$; das iſt in Buchſtaben
$m : 1 = PM : \text{ſin.}\, B = \frac{PM}{m}$; alſo

$\text{ſin.}\, B = \frac{PM}{m} \cdot m$

$m \cdot \text{ſin.}\, B = PM.$
$\text{ſin.}\, B = x$ nach der Vorausſetzung

Nr. III. $mx = PM.$ Da nun ferner
$NM^2 = PN^2 - PM^2$; ſo iſt in Buchſtaben und Ausdruck Nr. III.

$NM^2 = m^2 - m^2x^2 = m^2(1 - x^2)$; folglich

$NM = m\sqrt{(1 - x^2)}$.

Weil ferner
$QM^2 = PQ^2 - PM^2$, weil $PMQ = 90°$;
$QM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f . NM$ nach Nr. II.

ſo iſt

$PQ^2 - PM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f . NM.$

Nr. IV. d. i. in Buchſt. u. Ausdr. nach Nr. III.

$p^2 - m^2x^2 = QN^2 + m^2 - m^2x^2 - 2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)}$
$m^2x^2 = m^2x^2$ add.

$p^2 = QN^2 + m^2 - 2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)}$
$2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)} = 2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)}$ add.

$2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)} + p^2 = QN^2 + m^2$
$p^2 = p^2$ ſubtr.

$2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)} = QN^2 + m^2 - p^2$
$QN^2 = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\phi$ Nr. I.

ſubſtit.

2π

$$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\Phi + m^2 - p^2$$
$$m^2 - p^2 + \mu\mu = m^2 - p^2 + \mu\mu \quad \text{ſubtr.}$$

$$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} - (m^2 - p^2 + \mu\mu) = \pi\pi - 2\pi\mu\Phi. \qquad ;\pi$$

$$2fm\sqrt{(1-x^2)} - \left(\frac{m^2-p^2+\mu\mu}{\pi}\right) = \pi - 2\mu\Phi. \qquad ; 2fm$$

$$\sqrt{(1-x^2)} - \left(\frac{m^2-p^2+\mu\mu}{2\pi fm}\right) = \frac{\pi - 2\mu\Phi}{2fm};$$

folglich herübergeſetzt

$$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi-2\mu\Phi}{2fm} + \left(\frac{m^2-p^2+\mu\mu}{2\pi fm}\right);$$ aber

$m^2 + \mu^2 = 1$ nach §. 700.

folglich ſubſtit.

Nr. V. $$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi-2\mu\Phi}{2fm} + \frac{1-p^2}{2\pi fm}$$

$1-p^2 = \pi^2$ §. 700. folgl.

$$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi-2\mu\Phi}{2fm} + \frac{\pi^2}{2\pi fm};$$ und π gegen π aufgehoben,

$$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi-2\mu\Phi}{2fm} + \frac{\pi}{2fm};$$ u. wenn man wirklich abd. $\pi+\pi$, weil die Benennung einerley iſt;

$$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{2\pi-2\mu\Phi}{2fm},$$ und durch 2 aufgehoben

$$\sqrt{(1-x^2)} = \frac{\pi-\mu\Phi}{fm}.$$

Es ſey ferner $y = \text{ſin.}\frac{1}{2}B$, oder ſin. $\frac{1}{2}$PBA.

Es iſt aber, wenn $r = 1$,

$$y^2 = \frac{1 - \cos.x}{2}$$ nach §. 735.; aber

$$\cos.x = \sqrt{(1-x^2)} \text{ nach §. 700.}$$

folglich Nr. VI. $y^2 = \frac{1-\sqrt{(1-x^2)}}{2}$.

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi-\mu\phi}{fm} \text{ nach Nr. V.}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} - \frac{(\pi-\mu\phi)}{fm} = \frac{fm-(\pi-\mu\phi)}{2fm}; \text{ das iſt}$$

$$y^2 = \frac{fm-\pi+m\phi}{2fm} \text{ Aber}$$

$$fm+\mu\phi = \cos.(BP-AB) \text{ §. 748.}$$

$$y^2 = \frac{\cos.(BP-AB)-\pi}{2fm}$$

$$\pi = \cos.AP$$

$$y^2 = \frac{\cos.(BP-AB)-\cos.AP}{2fm} \text{ Aber nach §. 737.}$$

$$\frac{\cos.(BP-AB)-\cos.AP}{2} =$$

$$(\text{ſin}.\tfrac{1}{2}AP-\text{ſin}.\tfrac{1}{2}(BP-AB)(\text{ſin}.\tfrac{1}{2}AP+\text{ſin}.\tfrac{1}{2}BP-AB;$$

alſo $y^2 = \frac{(\text{ſin}.\frac{1}{2}AP-\text{ſin}.\frac{1}{2}(BP-AB)(\text{ſin}.\frac{1}{2}AP+\text{ſin}.\frac{1}{2}(BP-AB)}{fm}$

Aber $fm = \text{ſin}.BP.\text{ſin}.BA)$

folgl. $y^2 = \frac{(\text{ſin}.\frac{1}{2}AP-\text{ſin}.\frac{1}{2}(BP-AB)(\text{ſin}.\frac{1}{2}AP+\text{ſin}.\frac{1}{2}(BP-AB.}{\text{ſin}.BP \;.\; \text{ſin}.BA.}$

Nr. VII.

Woraus die Proportion folget, wenn man den Radius, den man eins geſetzt, nach ſeiner Dimenſion ergänzet;

$\text{ſin}.BP.\text{ſin}.BA : r^2 = \text{ſin}.\frac{1}{2}[AP+(BP-AB)].$ $\text{ſin}.\frac{1}{2}[AP-(BP-AB)] : (\text{ſin}\,\frac{1}{2}B)^2$, weil $y^2 = (\text{ſin}.\frac{1}{2}B)^2$, woraus B gefunden wird.

§. 824.

§. 824. **Anmerk.** Wir haben dieſe Rechnung, die man für Kenner ungleich kürzer vortragen kann, mit Fleiß weitläuftig, und von Satz zu Satz ausgeſuchet, weil Anfänger neben der Uebung zugleich eine Gelegenheit darinn bekommen, die ganze Trigonometrie dabey auf einmal zu wiederholen.

§. 825. **Zuſatz.** Iſt der Ausdruck $\pi - \mu\phi$ negativ, ſo iſt der Winkel B gröſſer als 90°, und kleiner, wenn $\pi - \mu\phi$ eine poſitive Gröſſe in der Rechnung wird.

§. 826. **Zuſatz.** Wenn in einem ſchiefen ſphäriſchen Dreyeck die drey Winkel gegeben ſind, ſo kann man es in ein anders verwandeln, in welchem die Seiten den Winkeln des erſten in einerley Ordnung und Lage korreſpondiren und gleich ſind; wie man aus der Natur der ſphäriſchen Dreyecke begreift, ohne daß man die weitläuftige Rechnung nöthig hätte. Durch dieſe Verwandlung alſo hat man den vorigen Lehrſatz wieder; da man die Seiten, die nun nach der Verwandlung Winkel worden ſind, nach der vorigen Verhältniß findet.

§. 827. **Anmerk.** Dieß iſt das wichtigſte, das von der ſphäriſchen Trigonometrie zu wiſſen nöthig iſt. Auſſer dem Baron **Neper** hat der Baron **Wolf** eine eigene Regel erfunden, welche noch allgemeiner iſt als die Neperiſche, weil ſie ſich nicht nur auf rechtwinklichte, ſondern auch auf ſchiefwinklichte Dreyecke erſtreckt. Er hat ſie in ſeinen lateiniſchen Elem. Trig. ſphær. §. 100. 108. 134. demonſtrirt, und auch der Vorrede zu ſeinen logarithmiſchen Tafeln einverleibt: ſie iſt folgende für rechtwinklichte Dreyecke; wenn man ſie logarithmiſch ausdrückt: Sinus totus cum coſinu partis mediæ æquatur ſinibus ſejunctarum & cotangentibus conjunctarum. Wo man wiſſen muß, was der mittlere, und was die beyden abgeſonderten Theile ſind. Man betrachtet nämlich im rechtwinklichten Dreyeck nur fünf Stücke, der rechte Winkel wird gar nicht geachtet; die fünf Stücke ſind die drey Seiten und zween Winkel auſſer dem rechten. Nun ſind allemal zwey Stücke gegeben, das dritte ſucht man; von welchen dreyen eines in der Mitte, die übrigen zwey entweder unmittelbar daran liegend, oder durch zwey andere abgeſondert ſind. In einem Falle heiſſen dieſe zwo Theile partes conjunctæ, im andern ſejunctæ. Z. E. *Fig.* 97. Es iſt gegeben BP, BA, man ſucht B, ſo iſt B pars media; BP, BA ſind conjunctæ; P und PA ſind ſejunctæ. Der rechte Winkel bey A

wird

wird für nichts geachtet. Die Regel für die ſchiefen Dreyecke, nach dem man den Perpendikel gefällt hat, iſt folgende: pars media in primo triangulo cum extrema in ſecundo æqualis eſt parti mediæ in ſecundo cum extrema in primo. Z. E. Im Dreyeck BPD *Fig.* 100. iſt gegeben BP, BD, und der Winkel B; ſo ſucht man nach gefälltem Perpendikel PA die Seite BA, und daraus AD. Man nimmt PA im Perpendikel als extremam partem in beyden Dreyecken an, ſo ſind BA und AD mediæ, und B und D conjunctæ extremæ. Allein aus dieſer Regel muß man doch für jeden Fall die beſondere Proportion erſt herſuchen; daher andere für beſſer halten, eine kurze Tafel aller Fälle bey Handen zu haben, weil man doch bey ſolchen Rechnungen die Sinustafeln haben muß, und es alſo nicht darauf ankömmt, ob man eine Tabelle mehr oder weniger hat. Man kann ſie aus §. 802. leicht ordnen, wie folgende Tabelle ausweiſet.

Es

Es ſey

Gegeben	Geſucht	Proportionen	Fall
BP; PD; B	D	ſPD : ſB = ſBP : ſD	1
BP; B; D;	PD	ſD : ſBP = ſB : ſPD	2
BP; PD; B	BD	r : coſ.B = t.BP : t.BA coſ.BP : coſ.BA = coſ.DP : coſ.DA	3
BP; PD; B	P	r : coſ.BP = t.B : cot.BPA t.DP : t.BP = coſ.BPA : coſ.DPA	4
BP; B; D;	P	r : coſ.BP = t.B : cot.BPA coſ.PBA : ſBPA = coſ.PDA : ſDPA	5
BP; B; D;	BD	r : coſ.B = t.BP : t.BA t.PDA : t.PBA = ſBA : ſDA	6

Gegeben	Geſucht		
BP; B; P;	D	r : coſ.BP = t.B : cot.BPA ſBPA : ſDPA = coſ.B : coſ.PDA	7
BP; B; P;	DP	r : coſ.BP = t.B : cot.BPA coſ.DPA : coſ.BPA = t.BP : t.DP	8
BP; BD; B	DP	r : coſ.B = t.BP : t.BA coſ.BA : coſ.BP = coſ.DA : coſ.DP	9
BP; BD; B	D	r : coſ.B = t.BP : t.BA ſDA : ſBA = t.PBA : t.PDA	10
BP; BD; PD;	B	ſBP . ſBD : r^2 = ſ$\frac{1}{2}$ [PD+(BP—BD)]. ſ$\frac{1}{2}$[PD—(BP—BD)] : (ſ$\frac{1}{2}$B)^2	11
B; P; D;	Die Seiten	Durch die Verwandlung.	12

Drittes Hauptſtück,

von der

praktiſchen Geometrie.

§. 828.

Erklärung.

Die praktiſche Geometrie iſt die Anwendung der bisher vorgetragenen ſowohl geometriſchen als trigonometriſchen Lehrſätze auf die Ausmeſſung der wirklichen Ausdehnung, wie ſie vornämlich auf der Oberfläche des Erdbodens vorhanden iſt, durch Beyhilfe gewiſſer dazu dienlicher Inſtrumente.

§. 829. **Zuſatz.** Sie unterſcheidet ſich alſo von der Euklideiſchen Geometrie dadurch, daß man ſo viel Inſtrumente hier gebrauchen darf, als man will, da hingegen **Euklides** nicht mehr als den Zirkel und das Lineal zu den geometriſchen Auflöſungen und Beweiſen erlaubt hat.

§. 830. **Zuſatz.** Eigentlich iſt die praktiſche Geometrie eine Anwendung auf alles, was ſich ausmeſſen läßt; oder die ganze angewandte Mathematik. Man könnte ſie auch in die himmliſche oder oberirdiſche, in die irdiſche, und in die unterirdiſche eintheilen. Die erſte heißt die Aſtronomie, und iſt eine eigene Wiſſenſchaft der angewandten Mathematik; die zweyte, in ſo fern ſie ſich bloß auf die Oberfläche des Erdbodens beziehet, heißt die Feldmeßkunſt; und die dritte die Markſcheidekunſt (Lat. Geometria ſubterranea), welche letztere man billig

und

und mit eben ſo groſſem Recht, als die angewandte Mathematik, vortragen ſollte. Wir werden etwas davon ſagen, wenn wir zuvor die Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft erzählt haben werden.

Geſchichte der praktiſchen Geometrie.

§. 831. Wir haben in der Geſchichte des erſten Hauptſtücks ſchon gezeigt, daß die praktiſche, aber anfänglich ſehr ungekünſtelte Geometrie, der theoretiſchen den Urſprung gegeben habe; es wird alſo vergönnt ſeyn, das daſelbſt geſagte, in Rückſicht auf die älteſten Zeiten, vorauszuſetzen, und nur dasjenige, was die Geſchichte der hiezu dienlichen Inſtrumente betrift, hier zu ergänzen.

§. 832. Die vornehmſten Inſtrumente auſſer dem Zirkel und Lineal, ſind der Transporteur, das Aſtrolabium, das Parallellineal, der Winkelhacken, der verjüngte Maaßſtab, das Meßtiſchlein, der geradelinigte Transporteur, der Proportionalzirkel, nebſt einigen andern Gattungen von Zirkeln, und die zur unterirdiſchen Geometrie gehörigen Inſtrumente.

§. 833. Transporteur, Aſtrolabium und Winkelhacken ſind ſehr alte Inſtrumente, wie dann das Ptolemäiſche Aſtrolabium ſchon berühmt war; welches beſonders zur Ausmeſſung des Himmels beſtimmt war. Hingegen ſind die folgenden Inſtrumente ungleich neuer. Die älteſte Nachricht vom verjüngten Maaßſtab findet man bey dem Tycho von **Brahe**, welcher L. I. Epistolarum Astronom. p. 60. ſchreibt, er habe die Verfertigung dieſes Maaßſtabs zu Leipzig, wo er ſtudirt, im 17. Jahr ſeines Alters (1553) von dem damaligen Prof. der Mathematik Joh. Hommeln gelernet; wie ſolches auch Hr. Prof. Käſtner anmerkt mathem. Anfangsgr. T. I. p. 232. Die Erfindung des Meßtiſchleins eignet Daniel **Schwenter** dem Prätorius zu, der vor ihm Prof. der Mathematik zu Altdorf war, in Geom. pract. T. III. p. 637. Der geradelinigte Transporteur hat ſeyn Daſeyn den trigonometriſchen Erfindungen zu danken; Herr **Eberhard** hat Verbeſſerungen dazu angegeben, in der Beſchreibung einer neuen Meßtafel. 1753. Der Proportionalzirkel iſt eine Erfindung von dem ſchon genannten

ange=

Joſt Byrge, der bey dem Landgrafen Wilhelm zu Heſſenkaſſel Mechanikus war. Levin. Hulſius giebt zuerſt davon Nachricht, und eignet dem gedachten Byrge dieſe Erfindung zu, in dem Traktakt von mechaniſchen Inſtrumenten 1603. Byrge hat den Proportionalzirkel in Geſtalt eines gewöhnlichen Zirkels zuerſt gemacht, daher er auch dieſen Namen bekam; einige Jahr hernach hat Galiläus ihn verbeſſert, und anſtatt der Zirkelfüſſe zwey Linealen ſubſtituirt, und doch die Benennung des Proportionalzirkels beybehalten; daher kam es, daß einige die Erfindung dieſes nützlichen Inſtruments dem Galiläus zuſchrieben; aber der erſte Erfinder war der ſchon gemeldte Byrge, wie wir erwieſen; Galiläus hingegen hat die obigen Verbeſſerungen angebracht, mit welchen man noch itzt die Proportionalzirkel verfertiget; ſie dienen faſt alle arithmetiſche und geometriſche Aufgaben mechaniſch aufzulöſen. Auſſer dieſen Zirkeln hat man auch noch dreyfüſſige Zirkel, Taſterzirkel, wodurch man den Diameter einer Kugel abmißt; u. ſ. w. Von allen dieſen Inſtrumenten wird ausführlich gehandelt in Leupolds Theatro Arithmet. Geometrico.

§. 834. Wir wollen noch was von der unterirdiſchen Geometrie oder Markſcheidekunſt ſagen. Dieſe Wiſſenſchaft blieb bis auf das Jahr 1574. ein Geheimniß. In welchem Jahr Erasmus Rheinbold, ein Doktor der Arzneywiſſenſchaft zu Saalfeld, einen kurzen und gründlichen Unterricht vom Markſcheiden herausgab, damit, wie er in der Vorrede ſchreibt, hundert und noch mehr Gewerke nicht einem einzigen Markſcheider allein ohne einigen Beweis, hinfüro glauben, ſondern auch vor ſich ſelbſt die Wahrheit erfahren, und die Probe anſtellen können, ob die Gänge und Klüften richtig entſchieden ſeyn. Dieſes Werk wurde zu Frankfurt im Jahr 1616. wieder aufgelegt; blieb aber doch ſo unbekannt, daß im Jahr 1686. Nik. Voigtel bey der Ausgabe ſeiner Markſcheidekunſt vermeinte, er ſey der erſte, der hiervon was geſchrieben habe; welches auch andere Mathematikverſtändige damals glaubten, weil die Rheinboldiſchen Bemühungen faſt ganz in die Vergeſſenheit gekommen waren; inzwiſchen iſt das Voigteliſche Werk dem Rheinboldiſchen billig vorzuziehen. Im gegenwärtigen Jahrhundert hat Hr. Prof. Weidler zu Wittenberg 1726. Inſtitutiones Geometriæ ſubterraneæ in 4to nach mathematiſcher Lehrart herausgegeben;*) womit

*) Dieſes Buch iſt mit Zuſätzen von P. Nik. Fuchsthaller aus dem fr. Sch. aus dem Latein überſetzt herausgegeben worden, unter dem Titel: Anfangsgründe zur unterirdiſchen Meß- oder Markſcheidekunſt. Wien 1765. 8.

womit auch Beyers Markſcheidekunſt verglichen werden kann. Vor wenig Jahren hat Herr Rektor Maler zu Karlsruh dieſe Lehre, ſo viel davon in ein Handbuch gehört, in ſeiner Einleitung zur praktiſchen Geometrie vorgetragen. Wir werden am Beſchluß was davon melden.

§. 835. Anmerk. Herr von Segner ließ die praktiſche Geometrie in ſeinen Anfangsgründen ganz weg, weil man, um ſie richtig zu verſtehen, die Mechanik, Hydroſtatik, Optik, u. ſ. w. vorausſetzen müſſe; Herr Hofr. Käſtner hingegen trägt ſie mitten in der Elementargeometrie vor; welches zwar, wie er ſelbſt ſchreibt, wider die mathematiſche Methode geſchieht; allein um die Ungeduld der Anfänger, welche ſogleich nach der Anwendung fragen, zu ſtillen, und ihnen zu zeigen, daß ſie noch mehr Theorie lernen müſſen, trug er ſie ſo bald vor. Ich gebe den mittlern Weg, und wollte ſie weder ganz weglaſſen noch zu bald lehren, darum ſteht ſie zwiſchen der Trigonometrie und höhern Geometrie; unerachtet ſie übrigens noch ſpäter ſtehen ſollte, ſo muß man den Lernenden hier was zu Gefallen thun, damit, wenn ſie fragen, wozu dieß oder jenes nütze ſey, einigermaſſen geantwortet werde.

Die Vergleichung der vornehmſten Maaße.

§. 836. Willk. Satz. Wenn man das geometriſche Maaß mit andern vergleichen will, ſo nimmt man den Pariſerſchuh (Pied du Roi) zum allgemeinen Maaßſtab an, weil der Pariſerfuß unter den ſonſt gewöhnlichen und bekannten der größte iſt.

§. 837. Zuſatz. Wenn man den Pariſerfuß in 12″ und dieſe in 12 Linien, und noch jede Linie in 10 Theile theilet, ſo hält der Pariſerfuß 1 . 12 . 12 . 10, das iſt 1440 ſolche Theile; und dieſe Theilung iſt wirklich eingeführt.

§. 838. Anmerk. In der praktiſchen Geometrie hat man vornemlich den Pariſer, den Rheinländiſchen und den Londnerfuß zu bemerken; den erſten als den größten und allgemeinen Maaßſtab; den zweyten, weil er nicht nur in ganz Deutſchland, ſondern auch

in

in Dänemark eingeführt iſt; den Londner, weil er in mathematiſchen, beſonders aſtronomiſchen Rechnungen von engliſchen Scribenten gebraucht wird, wegen welcher Urſache man auch den Pariſer noch auſſer den ſchon angeführten Gründen zu wiſſen nöthig hat.

§. 839. **Lehrſatz.** Eine jede gegebene Länge läßt ſich in bloß geometriſchen Längenmaaſſen ausdrücken, in welchen zehen Linien einen Zoll, zehen Zoll einen Schuh, zehen Schuh eine Ruthe machen. Denn wenn x das Dezimalmaaß, und y das Duodezimalmaaß bedeutet, ſo iſt $10x = 12y$, oder zehen Dezimalzoll machen zwölf Duodezimalzoll. Dieß vorausgeſetzt, giebt es folgende Rechnung:

$10x = 12y$

——————: 10

$x = \frac{12}{10}y = 1,2\,..\,y.$ nach den Dezimalrechn. §. 80. 81.

Oder umgekehrt:

$12y = 10x$

——————: 12

$y = \frac{10}{12}x = \frac{5}{6}x = 0,8333\,...$ nach §. 111.

§. 840. **Zuſatz.** Ein Duodezimalzoll giebt alſo $\frac{5}{6}$ Dezimalzoll; folglich kann man nach der Regel Detri jedes gegebene Maaß reduziren; z. E. 7 Duodezimalzoll ſind $7 \cdot \frac{5}{6}$ Dezimalzoll $= \frac{35}{6} = 5,833\,...$ §. 81.

§. 841. **Erklär.** Nach den willkührlich angenommenen Längen der Schuhe findet man, daß, wenn der Pariſer 1440 gleiche Theile in ſich halte,

der Rheinländiſche	1391
der Londniſche	1350
der Wieneriſche	1401
der Nürnberger	1347 ſolcher Theile halte.

§. 842. **Lehrſatz.** Aus dem gegebenen Verhältniß der Schuhe läßt ſich eine in Schuhen oder Zollen gegebene

Länge auf eine andere reduziren von andern gegebenen Schuhen oder Zollen. Denn es bedeute p die Pariſiſche, r Rheinländiſche, w Wirtemb. Schuh, ſo iſt, wenn eine im Pariſermaaß gegebene Länge n heißt, und ſolche Länge im geſuchten Rheinländiſchen x genannt wird, $np = xr$ folglich

$x = \frac{np}{r}$, das iſt logarithmiſch $lx = ln + l\left(\frac{p}{r}\right)$

§. 843. Anmerk. Weil die meiſten Reduktionen auf der Verwandlung des Pariſerfuſſes in den Rheinländiſchen beruhen, ſo iſt es gut, um nicht immer zu viel ſchreiben zu dürfen, den $l.\left(\frac{p}{r}\right)$ auf einmal zu ſuchen; er iſt nämlich $lp - lr = l.\,14400 - l.\,13913 = 0{,}0149418$.

§. 844. Anmerk. Weil der Pariſerfuß gröſſer als der Rheinländiſche iſt, und ſechs Pariſerfuß eine Toiſe machen, ſo machen 2 Toiſen auch mehr als 12′ Rheinl. oder eine Rheinländiſche Ruthe; und 180° Toiſen ſind um vierthalb Ruthen gröſſer als 90 Rheinl. Ruthen. Der Beweis davon iſt folgender:

$6p = xr$ §. 842.

$:r$

$6.\frac{p}{r} = x.$; folglich

$l.6 + l.\left(\frac{p}{r}\right) = l.x.$ Nun iſt nach den Tabellen

$l.6 = 0{,}7781512$

$l\left(\frac{p}{r}\right)\ 0{,}0149418$

$lx = 0{,}7930930$, welchem in den Tafeln 6,2050 am nächſten kömmt; wo man bey dem Aufſchlagen die Regel, die §. 775. vorkömmt, zu bemerken hat; man ſchlägt nämlich unter den Karakteriſtiken 1, 2, 3, u. ſ. w. Logarithmen auf, bis man ihn für Dezimalbrüche ſo genau findet als es ſeyn kann.

Folglich ſind 6 Pariſerſchuh oder eine Toiſe um $\frac{205}{1000}$ Tauſendtheile eines Rheinl. Schuhes gröſſer als eine Rheinl. halbe Ruthe, oder

oder

oder 2 Toiſ. = 2 . 6, 205 = 12, 410 = 12, $\frac{41}{100}$ Rheinländ. Schuh. Dieß mit 90 multipl. giebt 12 . 90 + $\frac{41 \cdot 90}{100}$ = 90 Rheinl. Ruthen + $\frac{3690}{100}$ = $\frac{369}{10}$ = 36′ $\frac{9}{10}$ = 3°9′ Rheinl.

§. 845. Anmerk. Bey groſſen Rechnungen kommen alſo merkliche Fehler heraus, wenn man eine Toiſe für eine halbe Rheinl. Ruthe hält; z. E. in der Militärbaukunſt, wo die franzöſiſche Ingenieur, mit Vauban, 180 Toiſen für die Seite des Polygons annehmen, und Sturm 2 Toiſen auf eine Rheinl. Ruthe rechnet, in ſ. veritable Vauban, p. 101. folglich die Polygonſeite um 3 Ruthen zu klein macht.

§. 846. Zuſatz. Man kann nicht nur zwey, ſondern verſchiedene Maaße nach der Kettenregel mit einander vergleichen. Z. E. Man ſuche die Verhältniß des Wirtemb. Fuſſes zum Zelliſchen, wenn der Zeller zum Rheinl. iſt wie 48 : 51.

z : r = 48 : 51;
r : p = 1391 : 1440.
p : w = 1440 : 1268.

z : w = 48 . 1391 · 1440 : 51 . 1440 . 1268.
Oder kürzer = 48 . 1391 : 51 . 1268.,
weil man beyderſeits mit 1440 dividiren kann, folglich auch oben r : w = 1391 : 1268 ſetzen darf. Wenn man die Logarithmen hier wieder braucht, ſo wird die Rechnung, beſonders bey mehrern Faktoren, kürzer.

§. 847. Anmerk. Weitere Vergleichungen, beſonders in Rückſicht auf das Wirtemb. Maaß nach allen Gegenſtänden, die eines Maaſſes fähig ſind, findet man in dem Anhang zum kurzen doch gründl. Bericht vom Feldbau 1763. Nr. 5. unter dem Titel: Vergleichung des Wirtembergiſchen Maaſſes und Ge-

wichtes mit andern S. 52. von Herrn Prof. Sprenger in dem Herzogl. Wirtemb. Kloſter Maulbronn (*).

(*) Herr Abbe Liesganig hat in ſeinem vortrefflichen Werke vom Meridiangrade, den er gemeſſen hat, eine Tabelle gegeben, in welcher er die gemeinſten Maaſſen des bewohnten Erdbodens mit dem Wienerwerkſchuhe vergleicht, und ihre Längen in Theilchen angiebt, deren 100000 einen Wienerſchuh ausmachen. Wir wollen ſie in einem Auszuge geben.

Der Wienerſchuh	100000
— Bayriſche	92331
— Böhmiſche	93767
— Bologneſer	120319
— Däniſche	100166
— Florentiniſche	174195
— Leydner	99326
— Londner	96460
— Mähriſche	105700
— Mayländer	188400
— Neapolitaniſche Palm	82889
— Nürnberger	96109
— Pariſer	102764
— Rheinländiſche, wie der Leydner	— —
— neue römiſche Palm	70674
— Schleſiſche	91559
— Schwediſche	93951
— Turinerſchuh	162281

Die Meſſung und Verjüngung der Linien und Figuren.

§. 848. Erklär. Auf dem Felde bedient man ſich der Stäbe oder Pfäle, welche in gegebener Weite perpendikular abgeſteckt, und auf dem Felde eben das ſind, was auf dem Papier die Punkte, und der Meßketten oder Schnüre, welche von einem Stab zum andern reichen; die Schnüre aber müſſen wohl zubereitet werden, damit ſie durch die Verſchiedenheit der Witterung keine Aenderung ihrer Länge leiden; weil

weil aber dieſes nicht wohl verhütet werden kann, ſo bedient man ſich der Meßketten lieber. Einen Winkel auf dem Felde zu meſſen, hat man das Aſtrolabium oder Scheibeninſtrument, das mit einem Fuß verſehen iſt, nöthig. Die Inſtrumente ſelbſt laſſen ſich beſſer zeigen als weitläuftig beſchreiben, welches um ſo weniger nöthig iſt, als ſie bekannt genug ſind. Das Meßtiſchlein iſt ein viereckigt Brett, darüber weiß Papier geſpannt iſt, es ſteht auf einem beweglichen Fuß, und kann mit Dioptern verſehen werden.

§. 849. **Lehrſatz.** Eine Weite, das iſt, eine Länge auf dem Felde, läßt ſich meſſen, 1) wenn man von einem Endpunkt zum andern gehen kann, nach §. 408. 2) wenn man zu beyden Endpunkten von einem dritten Stand kommen kann, nach §. 425. 3) wenn man nur zu einem Endpunkt nicht aber zum andern kommen kann, nach §. 527. 4) wenn man die Endpunkte nur ſieht, aber zu keinem kommen kann, nach §. 425. 527.

§. 850. **Erläuter.** Wir wollen die Fälle kürzlich erläutern.

I. Fall. Wenn man von einem Endpunkt zum andern gerade meſſen kann, ſo iſt es natürlich, daß man die Meßſtange nur ſo oft anſchlagen darf, bis man den andern Punkt erreicht; folglich läßt ſich die Weite geometriſch meſſen.

II. Fall. Wenn man zwar nicht von einem Endpunkt zum andern geradezu meſſen, aber doch von einem dritten Stand, wie C *Fig.* 61. zu beyden Endpunkten A und D kommen kann. Denn in dieſem Fall, wenn A und D die geſuchte Linie, darf man nur CA, und CD meſſen, und jene Weite nach CB, dieſe nach CE in gerader Linie mit AC und DC zurücktragen, ſo iſt EB = AD; nach §. 425. Sollte eine Hinderniß im Felde ſeyn, daß man CE nicht ſo weit zurücktragen könnte, ſo darf man die Hälfte oder den dritten Theil u. ſ. w. beyderſeits zurücktragen, da dann EB der ſovielte Theil von AD ſeyn wird als BC von CD, nach §. 527.

III. Fall. Wenn man nur zu einem Punkt kommen kann, ſo mißt man den Winkel, wo man an den Endpunkt kommen kann; z. E. *Fig.* 60. den Winkel CAB, wenn man vom Standpunkt C nach A kommen kann, wie vorausgeſetzt wird, und macht in einer beliebigen Weite von C, z. E. in der Weite CD, den Winkel CDE = CAB; ſo iſt CD : DE = CA : AB; alſo läßt ſich AB finden, weil CD, DE, CA gegeben ſind, oder ſich unmittelbar meſſen laſſen. Dieſe iſt unter verſchiedenen andern Methoden die zuverläſſigſte, weil man den Standpunkt nicht ändern darf.

IV. Fall. Wenn man zu keinem Endpunkt kommen, ſondern ſie nur ſehen kann, ſo könnte man *Fig.* 61. die Linie AC nach dem III. Fall, und CD nach eben dem III. Fall ſuchen, aus dieſen beyden aber läßt nach dem II. Fall die geſuchte AD ſich finden. Aber dieſes Geſchäft iſt ſo weitläuftig, daß es heutzutag diejenigen Feldmeſſer, die nur ein wenig die Geometrie verſtehen, nicht gebrauchen. Wir wollen daher dieſe Aufgabe nach verſchiedenen Weiſen kürzer und mit mehrerer Genauigkeit auzulöſen ſuchen.

§. 851. **Lehrſatz.** Eine Weite, zu deren keinem Endpunkt man kommen kann, läßt ſich aus einem einzigen Stand durch das Meßtiſchlein, ohne daß er dürfte verrückt werden, finden.

Beweis. Es ſey *Fig.* 80. β die Weite AE zu meſſen, die man nur ſiehet, ohne daß man zu A noch E kommen könnte. Man ſetze das Meßtiſchlein Baed in B, nehme BD zur Standlinie, die man meſſen kann, und ſuche zuerſt BA, welches geſchieht, wenn man in C und D Stäbe in gerader Linie mit A einſchlägt, ſo daß D den Stab C, und C den Punkt A decket; man ziehe auf dem Meßtiſchlein von B gegen A eine unbeſtimmte Linie, z. E. Ba, und gegen C und D die Linien Bc, Bd, ſo iſt

ΔBCD ∽ ΔBcd §. 526. folglich
der Winkel Bcd = BCD und daher §. 532.
der Winkel Bca = BCA. weil ferner
der Winkel cBa = CBA ſo iſt §. 532.

ΔBac ∽ ΔBAC. und daher
bc : ba = BC : BA. alſo BA gefunden.

Ferner

Ferner ſuche man mit unverrücktem Meßtiſchlein aus eben dem Punkt die Weite AE. Zu welchem Ende man nur zwiſchen die Punkte E und D einen Stab F in gerader Linie einſtecken muß, daß D den Stab F, und F den unzugänglichen Punkt E decket; hernach zieht man von B gegen F die Linie Bf ſo, daß fd parallel FD wird, folglich auch fe parallel FE, und de parallel DE. So iſt Ba : ae = BA : AE. und alſo AE gefunden, aus eben dem Grunde der ähnlichen Dreyecke wie oben.

§. 852. Anmerk. Bey dieſer Auflöſung, welche mit dem Meßtiſchlein die bequemſte und richtigſte iſt, weil es nicht verrückt oder hin und her getragen werden darf, muß man doch ſich lange auf dem Feld verweilen, bis die Stäbe B, C, D und F eingeſchlagen ſind, daher, wo man nicht ſo viel Zeit hat, die trigonometriſche Auflöſung die kürzeſte iſt; davon wir itzt reden werden.

§. 853. **Lehrſatz.** Eine Weite, zu deren keinem Endpunkt man kommen kann, läßt ſich trigonometriſch durch eine einzige Standlinie und etliche an der Standlinie gemeſſene Winkel finden.

Bew. I. Fall bey einer Höhe:

Es ſey *Fig.* 102. CD eine unzugängliche Höhe, man meſſe die Standlinie AB, die Winkel CAD und B; ſo iſt alles vorbey, und man kann die Rechnung zu Haus genau finden. Denn wenn CAD gemeſſen iſt, ſo iſt auch ſein Nebenwinkel CAB gegeben; iſt CAB gegeben, und B gemeſſen, ſo weis man auch den Winkel ACB nach §. 468. Denn er iſt $180° - (CAB + B)$ folglich trigonometriſch nach §. 757.

ſin.ACB : AB = ſin.B : CA. Alſo hat man die Seite CA gefunden; und weil die Höhe perpendikular ſteht, ſo iſt bey D ein rechter Winkel; daher man weiter ſagt:

ſin.tot. : AC = ſin.CAD : CD.; alſo weis man die Höhe CD. Alles dieß wird durch Logarithmen berechnet, und ſo genau gefunden, als es nur immer durch Inſtrumente möglich iſt.

II. Fall bey einer unzugänglichen Weite auf dem Felde. Man ſoll *Fig.* 103. die Weite DE meſſen, von welcher man durch einen Fluß abgeſchnitten wird. Man mißt die Standlinie von A nach B, wo in A, C, B Stäbe eingeſtecket ſind, man mißt ferner die Winkel DAC, DCA, ECB, EBC, ſo hat man auch die Winkel bey D und E nach §. 468. und den Winkel DCE §. 445.

folglich iſt ſin.ADC : AC = ſin.A : DC

und ſin.CEB : CB = ſin.B : CE.

Man hat alſo die Seiten DC und CE gefunden, und weil man den Winkel DCE weis, ſo wird in der Auflöſung nach §. 757. zuerſt einer von den Winkeln DEC oder EDC geſucht; hernach aus dieſem Winkel die Seiten DE, weil ſin.DEC : DC = ſin.DCE : DE. welches logarithmiſch ſich finden läßt.

§. 854. Anmerk. Wenn *Fig.* 103. DAC ein rechter Winkel werden kann, ſo iſt die Auflöſung noch leichter; weil es aber im Felde nicht allemal angeht, groſſe Linien zu ziehen, oder ſie da zu ziehen, wo man ſie am bequemſten rechnen kann, ſo haben wir die Auflöſung lieber allgemein machen wollen.

§. 855. Erklär. Man ſagt, die Linien werden verjüngt wenn man das gröſſere Maaß unter ein proportionirlicheres kleineres bringt; z. E. eine Weite von 90° im Felde, ſoll aufs Papier nach dem verjüngten Maaßſtab gebracht werden. Man nimmt einen Maaßſtab an, auf welchem die Ruthe kaum einen Zoll beträgt, und die Schuhe, Zolle, Linien nach Proportion ebenfalls kleiner gemacht werden. Der verjüngte Maaßſtab *Fig.* 106. α. läßt ſich nach den Proportionsregeln §. 527. f. leicht zeichnen und gebrauchen. Wie ſich dann auch jede Linie nach §. 311. proportionirlich einer andern gemäß theilen läßt.

Die

Die Meſſung und Verjüngung der Flächen, oder das Aufnehmen einer Gegend.

§. 856. **Lehrſatz.** Eine Fläche, in welche man hineingehen kann, wird ausgemeſſen, wenn man nach ihrer Länge *Fig.* 101. die Linie AK, und wo Ecke ſind, die Parallellinien Bb, Cc, Ff, Gg, Hh, Ii u. ſ. w. zieht; die Summe aller Trapezien nebſt den zwey Dreyecken ABb, und DdK, die man aus Dd und K2, Bb und A1 findet, wird der Inhalt der ganzen Fläche ſeyn. Dieſe iſt eine der leichteſten Manieren.

§. 857. **Zuſatz.** Eine Fläche, in die man hineingehen kann, wird auch ausgemeſſen, wenn man alle ihre Seiten und Diagonallinien mißt; in welchem Falle man, wie auch oben, kein anderes Werkzeug als Stäbe und Meßketten braucht, und man kann ſie hernach auch verjüngen, weil durch die Diagonalen Dreyecke entſtehen; wie *Fig.* 105. wo CA : AB = Ca : ab; ferner CB : BD = Cb : bd u. ſ. w.

§. 858. **Zuſatz.** Kann man in die Fläche hineingehen, ſo wird ſie auch gemeſſen und verjüngt, wenn man nach Belieben in der Fläche einen Punkt, F wie C *Fig.* 104. annimmt, und die Linien CD, CE, CF, u. ſ. w., und hernach die Parallelen de, ef, fg u. ſ. w. in der Diſtanz, wie man die verjüngte Figur haben will, zieht; ſo iſt abdefg die verjüngte Figur von ABDEFG; denn CD : DE = Cd : de; CE : EF = Ce : ef; CF : FG = Cf ; fg u. ſ. w.

§. 859. **Zuſatz.** Wenn man in die Fläche nicht hineinkommen, ſondern nur um ſie herumgehen kann, ſo mißt man alle Seiten und Winkeln; aus welchen ſich die Figur beſtimmen, und verjüngern läßt.

§. 860. **Zuſatz.** Wenn man in die Figur weder hineinkommen, noch um dieſelbe herumgehen kann, ſondern ſie

und

und ihre Winkel nur aus zwey Ständen von ferne überſehen kann, ſo mißt man nach §. 851. die Seiten, als Weiten die man ſieht, aber zu denen man nicht kommen kann, und ihre Lagen gegen einander nach §. zit.; da man dann die ganze Figur bekömmt, und ſie in Grund legen kann.

§. 861. Anmerk. Auf dieſe Art werden ganze Gegenden aufgenommen und in den Grund gelegt; man begreift aber von ſelbſt, daß man beſonders bey groſſen und mehrere Meile breiten und langen Gegenden die optiſchen Wiſſenſchaften, das Waſſerwägen, die geographiſchen Linien, die in der mathematiſchen Geographie vorkommen, zugleich verſtehen müſſe, wenn es an der Genauigkeit, eine groſſe Gegend richtig aufzunehmen, nicht fehlen ſoll. Jedoch bey kleinern Gegenden, die kaum eine Meile betragen, hat man die hier genannte Wiſſenſchaften der angewandten Mathematik nicht ſo nöthig.

Etwas von der Markſcheidekunſt.

§. 862. **Erklär.** Die **Markſcheidekunſt** oder die unterirdiſche Geometrie iſt die Wiſſenſchaft, die unter der Erden gemachte Gänge, die man Grubengebäude nennet, auszumeſſen und zu zeichnen, oder in den Riß zu bringen.

§. 863. **Zuſatz.** Wer alſo die Geometrie verſteht, der wird die Markſcheidekunſt bald lernen, wenn er nur die Sprache der Bergleute ſich bekannt macht, und mit den zum unterirdiſchen Meſſen tauglichen Inſtrumenten, die in der Hauptſache von den übrigen Inſtrumenten der praktiſchen Geometrie nicht viel unterſchieden ſind, umzugehen weis.

§. 864. Anmerk. Wir wollen die Bergmannsſprache kürzlich erklären, damit man hernach von dem Geſagten deſto beſſer überzeugt werde. Das Längenmaaß heißt ein **Lachter**, das gemeiniglich 6 Schuh hält, wie ein Klafter. Ein Schuh hält 10 Zoll, und ein Zoll 10 Gran; folglich läßt ſich ein Lachter in Gran geben. Im Flächenmaaß hat man die Namen **Fundgrube**, **Wehr**, **Lehn**; eine Fundgrube hält drey Wehr, ein Wehr zwey Lehne,

ein

ein Lehn iſt 7 Lachter lang und breit. Für die Namen horizontal, perpendikular und ſchief ſind in den Bergwerken ganz andere eingeführt; wenn man ein rechtwinklichtes Dreyeck betrachtet, bey welchem alle drey Namen, horizontal, vertikal und ſchief vorkommen, ſo heißt die horizontale Grundlinie die **Sohle**, die perpendikular oder aufrecht ſtehende Seite die **Seigerteufe**, und die ſchiefe Hypothenuſe die **Fläche**, worauf man in die Grube auf- und ab ſteigt. Die gegrabenen Gänge heiſſen **Gruben** oder **Grubengebäude**; ſind ſie perpendikular oder unter einem Winkel, der mit dem Horizont 80 — 90° macht, ſo heißt man ſie eine **Schacht**; geben ſie mehr horizontal, ſo heiſſen ſie **Stollen**. Ein Gang, der mit dem Horizont einen Winkel von 60 — 80° macht, heißt ein **ſtehender Gang**, ein **flacher**, der einen Winkel von 20 — 60°, und ein **ſchwebender Gang**, der einen Winkel zwiſchen dem Horizont und 20° macht. Was in die Höhe geht, ſind **ſteigende**, was in die Tiefe, **fallende** Gänge; Steigen und Fallen heißt die **Dohnlege**, die Meſſung heißt ein **Zug**, unter der Erden ein **Grubenzug**, oberhalb der Erden ein **Tagzug**. Bringt man das Gemeſſene überhaupt aufs Papier, ſo heißt es **zulegen**, vom Papier aufs Feld, **zugeben**. **Vermeſſen** iſt den Ort auf der Oberfläche der Erde beſtimmen, wie weit man graben dürfe. **Orthungen** ſind diejenigen Punkte der Gruben, wo ein Winkel iſt, oder die Gruben ſich wenden, da man alſo nicht gerade fortmeſſen kann, ſondern eine neue Linie zieht; Orthungen am Anfang und Ende der Gruben heiſſen **ganze** Orthungen; und wenn ſie oben auf der Erde perpendikular angezeigt werden, ſo ſagt man: die **Orthung werde an Tag ausgebracht**. Die Pfäle womit dieſes geſchieht, heiſſen **Ortpfäle**; und die Steine **Lochſteine**. Ein Perpendikel von einem Punkt über der Erde in die Grube heißt die **Lochſteine in die Grube fällen**. Ein **Durchſchlag** iſt ein von einem Punkte zu einer Grube gemachter Zugang. Reſolviren heißt aus zwey Stücken des rechtwinklichten Dreyecks, z. E. aus der Fläche (Hypothenuſe) und einem Winkel auſſer dem Rechten die übrigen Stücke finden, z. E. die Seigerteufe und Sohlen.

§. 865. **Anmerk.** Die Inſtrumente, die man zum Markſcheiden braucht, ſind die **Gradbogen** oder die **Waſſerwage**, die wie ein Transporteur mit einem Bleywurf ausſieht; der **Häng-** oder **Grubenkompaß**, welcher wie ein anderer Kompaß beſchaffen iſt, nur daß die Peripherie in 24 gleiche Theile getheilt iſt, die man nach den Stunden des Tages, **Stunden** nennt; die 12te gegen Mittag wird bezeichnet mit **Merid.**, und die 12te gegen Mitternacht mit **Septentr.**; auf die Abendſeite kommen die Morgenſtun-

ſtunden; und auf die Morgenſeite die Abendſtunden, wie bey Sonnenuhren. Nach dieſen Stunden oder Weltgegenden heiſſen die zwiſchen 9 und 12 fallende Gänge, flache, die zwiſchen 12 und 3, ſtehende, zwiſchen 3 und 6, Morgen- und zwiſchen 6 und 9, Spatgänge. Auſſer dieſen Inſtrumenten hat man noch die Stundenſcheibe und Stundentransporteur, welche wie die Peripherie des Kompaſſes eingetheilt ſind, und das Zuleginſtrument zum Zeichen und Verjüngern der Grubengebäude nöthig. Man lernt ſie beſſer durch das wirkliche Anſchauen als durch Zeichnung kennen, und gebrauchen. Uebrigens ſieht man aus dieſer kurzen Nachricht, daß die geometriſchen Wiſſenſchaften einem Markſcheider unentbehrlich ſeyn, und daß er in ſeiner Kunſt deſto weiter es bringen werde, je mehr er ſich mit der Geometrie und Trigonometrie bekannt gemacht hat.

Vier-

Viertes Hauptſtück.

Von der höhern Geometrie.

§. 866.

Erklärung.

Unter der höhern Geometrie verſtehen wir ſowohl die Wiſſenſchaft, alle übrigen krummen Linien auſſer dem Zirkel zu beſtimmen, und durch eine Art Gleichungen auszudrücken, auch wo es ſeyn kann, auszumeſſen, als auch die Rechnung des Unendlichen, die, wie im Erfolg deutlich erhellen wird, nicht nur in Rückſicht auf ihre Anwendung, ſondern auch ſelbſt auf ihre Erfindung einen weit gröſſern Antheil an der Geometrie als an der Arithmetik hat, folglich unter dem allgemeinen Namen der höhern Geometrie mit begriffen werden kann. Welches wir deswegen anmerken, weil ſonſt dieſer Theil der höhern Geometrie die Analyſis des Unendlichen genannt, und unter dieſem Titel vorgetragen wird. Wir wollen, wie in den bisherigen Hauptſtücken, zuerſt die Geſchichte der höhern Geometrie vortragen.

Geſchichte der höhern Geometrie.

§. 867. Bey der Geſchichte der höhern Geometrie dürfen wir in der Zeitordnung nicht über den **Apollonius** uns hinaus wagen. Denn obſchon noch verſchiedene vorher ſich mit Betrachtung der krummen Linien auſſer dem Zirkel beſchäftiget haben, ſo ſind theils ihre Arbeiten ſämmtlich verloren ge-

gegangen, theils kann man ihre Erfindungen mit keiner völligen Gewißheit beſtimmen.

§. 868. **Anmerk.** Was nun den **Apollonius** betrift, ſo iſt er zu **Pergen**, einer Stadt in Pamphilien, geboren zur Zeit des Königs Ptolemäus Evergetes, ungefähr 247. Jahr vor Chriſti Geburt; er war gegen 40. Jahr jünger als Archimedes, von dem wir auch ſogleich was reden werden. **Cardanus** giebt ihm die ſiebente Stelle unter den ſubtilſten Köpfen, die jemals die Welt geſehen hätte. Er legte ſich mit allem Fleiſſe unter den Nachfolgern des Euklides zu Alexandrien auf die mathematiſchen Wiſſenſchaften, und brachte es darinn ſo weit, daß er acht Bücher von den koniſchen Sektionen oder Kegelſchnitten herausgab, worinn er zuerſt zeigte, daß man aus einem jeden Konus oder Kegel alle drey Sektionen ſchneiden könne, da man vorher glaubte, zu einer Parabel müſſe man einen rechtwinklichten, zur Ellipſe einen ſpitzwinklichten, und zur Hyperbel einen ſtumpfwinklichten Kegel haben. Auſſer dieſer Erfindung hat Apollonius alles in ſeinen acht Büchern zuſammengetragen, was Ariſtäus, Eudoxus Menechmus, Euklides, Konon, auch zum Theil Archimedes und andere vor ihm von Kegelſchnitten gelehrt haben.

§. 869. **Anmerk.** Die acht Bücher des Apollonius ſind nicht immer bis auf unſere Zeiten ganz vorhanden geweſen. Im vorigen Jahrhunderte hatte man nur die vier erſten, welche urſprünglich griechiſch noch übrig ſind; nachgehends hat **Jac. Golius** noch drey arabiſch überſetzte Bücher des Apollonius aus dem Orient erhalten, und ſolche lateiniſch herausgegeben. Das achte ſchätzte man für verloren; bis endlich Edm. **Halley** in der bodlejaniſchen Bibliothek ein arabiſches Manuſkript davon fand, welches er 1706. lateiniſch herausgab. Halley ſchreibt in der Vorrede, Edm. Bernardi habe das Werk zu überſetzen angefangen, wäre aber darüber verlegen; endlich hat Halley, unerachtet er kein arabiſch verſtunde, aus der Bernardiſchen angefangenen Ueberſetzung den Reſt vollends dechifriret. Man hat auch noch andere Ueberſetzungen. Und auf dieſe Weiſe hat man nun den Apollonius ganz, aber nur die vier erſten Bücher in der Originalſprache. Uebrigens iſt dieß Werk ſo allgemein und abſtrakt geſchrieben, daß **Keppler** in Introd. Comm. de ſtella Martis ſchreibt: Quotusquisque mathematicorum eſt, qui tolerat laborem perlegendi Apollonii Pergæi conica? Daß dieſes übrigens die wahre Arbeit des Apollonius ſey, erhellet aus dem **Pappus** von Alexandrien, welcher ungefähr gegen das Ende des vierten

Jahr-

Jahrhunderts nach Chriſti Geburt ſeine Collectanea Mathematica herausgegeben, und von dieſer Apolloniſchen Arbeit ausführlich geſchrieben hat. Die beſten Kommentatoren über den Apollonius unter den Alten waren der **Eutocius**, der unter dem Kayſer Juſtinianus ſich einen Namen machte, und hernach die **Hypathia** die Tochter des Theons, welche dem **Suidas** zu Folge ſich mit eben dieſer Arbeit beſchäftigte; nachgehends wurden im Jahr 900 nach Chriſti Geburt die Werke des Apollonius in das Arabiſche überſetzt, und von dieſer Zeit an kamen ſie unter den Chriſten in eine ziemliche Vergeſſenheit, bis im 14 und folgenden Jahrhunderten mit andern Wiſſenſchaften auch die mathematiſchen wieder hergeſtellt wurden.

§. 870. **Anmerk.** Auſſer den Kegelſchnitten haben die Alten noch einige andere Linien betrachtet, dergleichen die Spirallinie des **Archimedes**, die Quadratrix des **Dinoſtratis** u. ſ. w. Man hat aber die Betrachtung der aus koniſchen Schnitten entſtehenden krummen Linien immer vorgezogen, und wegen ihrer Nutzbarkeit ſich vornehmlich damit beſchäftiget.

§. 871. **Anmerk.** Wir haben ſchon gemeldet, daß die Wiſſenſchaften im ſechſten Jahrhundert unter den Chriſten ſehr abnahmen, und bald darauf ihren Zug zu den Arabern genommen, welche die philoſophiſchen und mathematiſchen Werke der alten Griechen überſetzen lieſſen, und mit Nutzen gebrauchten. Als endlich die Araber, nach der Vereinigung mit den Türken, den Geſchmack an Wiſſenſchaften wieder verlohren, gieng ein neues Licht in den Abendländern unter den Chriſten auf, und die Mathematik bekam auch eine neue Geſtalt; doch gieng es etwas langſamer, und man wird nicht wohl ſchicklicher als mit dem vorigen Jahrhundert den Anfang machen können, wenn man die Geburtszeit der neuern mathematiſchen Wiſſenſchaften beſtimmen will. Was in Rückſicht auf die Buchſtabenrechnung von Kardanus, Vieta und nach ihm vom Karteſius geleiſtet worden, haben wir im II. Hauptſtück der arithm. Wiſſenſch. gemeldet. Wir wollen alſo nur von der Rechnung des Unendlichen noch reden.

§. 872. Wenn wir bey Unterſuchung der neuen Geſchichte der Analyſis des Unendlichen den Iſaak **Barrow**, einen gleich groſſen Theologen und Mathematiker, unter welchem Newton den Grund zu ſeinen erhabenen Studien geleget hat, vor allen andern zuerſt nennen, ſo werden wir am

wenigſten irren. Er hat das Triangulum Characteriſticum, wie es die Leibnizianer nennen, aus Betrachtung der Subtangente unſtrietig erfunden, und was die Deutſche dy und dx nennen, e und a genannt; die Figur, wie ſie in den Schriften der Analyſten noch itzt zu Grund gelegt wird, und die Erklärung davon ſteht in Barrows Lectionibus opticis, die ein Newton ſowohl als ein Leibniz leſen konnte. Nun iſt das freylich noch nicht die ganze Rechnung des Unendlichen; aber einem Newton oder Leibniz durfte man nur einen Fingerzeig geben, ſo konnten ſie weiter ſchlieſſen; daher es gar wohl begreiflich iſt, daß Newton und Leibnitz jeder für ſich aus des Barrows Schriften oder Unterricht ſo viel Licht bekommen, daß ſie die Rechnung des Unendlichen oder die ſo gemeinnützige und erhabene Analyſis nach ihren erſten Gründen erfunden haben; da dann der ganze Streit, wem die Ehre der Erfindung gebühre, auf einmal entſchieden wäre. Denn daß mehrere Gelehrte einerley Satz erfinden, giebt es genug Exempel. Den wichtigen Satz von den Differenzialen vermiſchter Funktionen, die wir an ſeinem Ort erklären werden, haben in neuern Zeiten Herr Euler und Herr Clairaut jeder für ſich erfunden.

§. 873. Die erſten Erfinder der neuern Analyſis waren alſo Barrow, der den Grund gelegt, Newton und Leibnitz, die darauf zuerſt gebauet haben. Ich ſage der Neuern Analyſis, denn es ſcheint, ſie ſey nur wieder erfunden worden, als eine den Alten bekannte und nachgehends verlohrne Kunſt. Denn Archimedes hat die Parabel quadriren können, wie man ſie durch die Integralrechnung quadriren kann. Es iſt dahero faſt zu vermuthen, er habe die Analyſin mit andern gewußt, aber geheim gehalten, und die dadurch erfundenen Sätze ſynthetiſch vorgetragen. Doch es iſt eine Muthmaſſung; denn er kann die Quadratur der Parabel auch ohne Analyſis des Unendlichen durch andere Rechnung erfunden haben. Wir kommen auf die neuere Geſchichte wieder zurück. Iſaac Barrow wurde 1630 zu London geboren, er ſtudirte zu Kambridge, gieng 1655 auf Reiſen, zu deren Beſtreitung er ſeine Bücher verkaufte, beſah Frankreich, Italien, die Levante, Konſtantinopel, und kam 1659 über Venedig

Deutſch.

Deutſchland und Holland wieder nach Haus. Er wurde hierauf Prediger, und erhielt bald hernach die Profeſſion der griechiſchen Sprache zu Kambridge; 1662 wurde er Prof. der Geometrie, und das folgende Jahr Mitglied der königlichen Sozietät der Wiſſenſchaften; 1670 wurde er Doktor und Prof. der Theol. und überließ die mathematiſche Profeſſion ſeinem groſſen Schüler, dem Newton. 1675 wurde er Kanzler, und ſtarb 1677 zu London, als er dahin reiſete, die Paßionspredigten, als Kaplan Karl des II., welche Stelle er dabey hatte, zu halten. Seine Schriften ſind eine Ausgabe des Euklides; Euclidis Elem. XV. breviter demonſtrata; ferner Lectiones opticæ 18. in Scholis publicis Cantabrigiæ habitæ; wo eben die erſten Gründe zur Analyſis vorkommen. u. ſ. w. Seine theologiſchen Werke hat Tillotſon in drey Folianten zuſammen herausgegeben, und ſein Leben dabey ausführlich beſchrieben. Iſaac Newton, verdient ein gleich groſſes Angedenken. Er wurde 1642. in der Provinz Linkoln gebohren. Zu Kambridge ſtudirte und lehrte er bis aufs Jahr 1688; da er zum Parlamentsglied nach London von Seiten der Univerſität gewählt wurde. 1699 wurde er Obermünzmeiſter zu London, und zugleich 1703 Präſident der Sozietät der Wiſſenſchaften. Dieſe Bedienung behielt er bis an ſein Ende, das den 20 März 1728 erfolgte; da er 84 Jahr alt war. Man begrub ihn in der Abtey Weſtmünſter, wo ihm auf öffentliche Koſten ein prächtiges Grabmal gebaut wurde, die Inſchrift zeigt von ſeinen Verdienſten, Einſicht, Gottesfurcht und ganzem Karakter; ſie iſt die folgende: Iſaacus Newtonus, Eques Auratus, qui animi vi prope divina planetarum motus, figuras, cometarum ſemitas, oceanique æſtus, ſua matheſi facem præferente, primus demonſtravit, radiorum lucis diſſimilitudines, colorumque inde naſcentium proprietates, quas nemo ante ſuſpicatus erat, perveſtigavit. Naturæ, Antiquitatis, S. Scripturæ, ſedulus, ſagax, fidus Interpres, Dei O. M. Maieſtatem aperuit, Evangelii ſimplicitatem moribus expreſſit! Sibi gratulentur mortales tale tantumque exſtitiſſe humani generis decus. Nat. 25. Dec. 1642. denat. 20 Mart. 1728. Gottfr. Wilh. Leibniz wurde 4 Jahr nach dem Newton zu Leipzig 1646 geboren; ſtudirte mit groſſem Fleiß, und wurde zu Altdorf Doktor in der Rechtsgelehrſamkeit, bald darauf Kurmaynziſcher Rath und Hofmeiſter der jungen Herrn von Boineburg, die er nach Paris, Holland und Engelland, und von da aus nach Hannover führte, wo er Herzogl. Rath und Bibliothekarius wurde; einige Zeit hernach bekam er Befehl, die Hiſtorie des Hauſes Braunſchweig zu ſchreiben, zu welchem

Z 2 Ende

Ende er verſchiedene Reiſen durch Deutſchland und Italien machte; 1700 wurde er Mitglied der Akadem. zu Paris, Präſident der Akad. zu Berlin, ferner ruſſiſcher geh. Rath mit einem Gehalt von 1000 Dukaten, unter dem Czaar Peter, endlich Reichshofrath zu Wien, und Baron, auch königl. eng. geh. Rath und Hiſtoriographus; er ſtarb 1716 den 14. Nov. L'Advocat ſchreibt in ſeinem gelehrten Lexicon, der Verdruß über das wider ihn ausgefallene Urtheil, die Erfindung der Differenzialrechnung betreffend, habe viel zu ſeinem Tode beygetragen. Man hat aber billige Urſachen, an der Richtigkeit dieſer Auſſage ſehr zu zweifeln. Aus dieſer Geſchichte ſieht man, daß Leibnitz nicht nur ein Mathematiker, ſondern ein gleich groſſer Philoſoph und Hiſtoriker, überhaupt einer der größten Geiſter des vorigen Jahrhunderts geweſen ſey.

§. 874. Anmerk. So wichtig auch die Erfindungen eines Newton und Leibnitz waren, ſo würden ſie doch nicht ſo gemeinnützig geworden ſeyn, wenn ſich nicht zu gutem Glücke um dieſe Zeit gleich groſſe Kenner gefunden hätten, welche das angefangene Gebäude erweitern, und bis auf den höchſten Gipfel vollführen konnten. Das waren die berühmten Bernoulli und der Marquis d'Hopital; was die Herrn Bernoulli betrift, ſo ſind die erſten Jac. und Joh. Bernoulli, zween Brüder, deren erſter 1654. der letztere aber 1667. zu Baſel geboren wurde. Erſterer wurde Prof. der Mathematik zu Baſel, und der jüngere folgte ihm in der Profeſſion nach ſeinem 1705 erfolgten Tode. Dieſer brachte es ungleich weiter, als ſein früh verſtorbener Herr Bruder, mit welchem er gemeinſchaftlich den Differenzialkalkul auflöſte, wie ihn Herr von Leibnitz in den Actis Erud. 1684. bekannt machte. Allein Joh. Bernoulli dachte noch weiter, und kam in ſeinen Schriften auf die Integralrechnung und deren Erweiterung, ferner auf den Exponenzialkalkul und auf die logarithmiſchen Differentialien: wodurch die Rechnung des Unendlichen ungemein verſchönert und nützlicher wurde. Dieſer Joh. Bernoulli iſt ein Vater von drey eben ſo gelehrten Herrn Söhnen, dem Hrn. Nikolaus, dem Hrn. Daniel und Hrn. Joh. Bernoulli. Der erſte, der eine neue Art, die Geſtalt der unendlichen Reihe zu finden, bekannt machte, und in die Fußſtapfen ſeines groſſen Herrn Vaters trat, ſtarb zu Petersburg frühzeitig im Jahr 1726., da er kaum 31 Jahr alt war; der andere iſt der noch jetzo lebende berühmte Dan. Bernoulli, der zu Baſel die Mathematik und Naturlehre mit ſeinem Herrn Bruder lehret. Der berühmte Herr Vater ſtarb 1748. den 1 Jäner in einem ho-

hen

ben und verdienſtvollen Alter. Wilhelm Franz Anton, Marquis von Hopital ſtiftete eine genaue Freundſchaft mit dieſem Herrn Bernoulli, und machte ſich durch ſeine Analyſe des infiniment petits 1696. berühmt; er ſtarb 1704 in einem Alter von 44 Jahren.

§. 875. In dem gegenwärtigen Jahrhunderte hat man die höhere Geometrie faſt auf den höchſten Gipfel gebracht, nachdem unter den Deutſchen Hr. Prof. Leonh. Euler zu Petersburg, und der ſchon genannte Herr Dan. Bernoulli zu Baſel, auch der verſtorbene Herr Gabriel Cramer in Genf, der ſich durch die Linien von doppelter Krümmung (à double courbure) einen Namen machte, unter den Engländern ein Maklaurin in ſeinem Treatiſe of Fluxions, unter den Franzoſen Herr Clairaut und Herr D'Alembert, doch jener vorzüglich in der reinen Mathematik, die wichtigſten Erfindungen gemacht haben, wovon wir im folgenden reden werden.

§. 876. **Anmerk.** Die mathematiſchen Handbücher, die in Deutſchland beſonders in gegenwärtigen Jahrhundert, herausgekommen, verdienen hier noch eine Stelle; das erſte iſt das Wolfiſche, nämlich die lat. Elemente, auch die deutſchen Anfangsgründe, in welchen von der höhern Geometrie ſo viel ſteht, als man zu Anfang dieſes Jahrhunderts wußte; ſie haben ſich ein halbes Jahrhundert erhalten, die Hauſeniſchen Schriften ſind noch beſſer, wurden aber nicht ſo gemein als die Wolfiſchen. In Zeit von zehen Jahren ſind aber drey ſehr gute Handbücher zum Vorſchein gekommen, durch welche das Wolfiſche verdrungen zu werden ſcheint, wenn anders die Lehrer, auch auf Akademien, die neueren Entdeckungen der Analyſis ſich bekannt machen, und kein allzu groſſes Vorurtheil für dasjenige haben, was und wie ſie die Sache ehemals gelernet haben, da man nur das zu denſelbigen Zeiten recht gute Wolfiſche Handbuch erklärte. Dieſe neuen Handbücher ſind das Segneriſche, von welchem die Verfaſſer der Göttingiſchen gel. Anzeigen 1758. p. 138. ſchreiben: „Der Nutzen dieſes Werks fällt deſto deutlicher in die Augen, da man in Deutſchland zur Analyſis kein anderes Lehrbuch als das Wolfiſche hat brauchen können, das in der That zu der Zeit, da es herauskam, vor 50 Jahren, von der damaligen Vollkommenheit der Wiſſenſchaften weniger entfernet war, als von der jetzigen, aber doch ſeitdem faſt die Aſymptote der analytiſchen Einſicht der meiſten deut-

ſchen Profeſſorn der Mathematik geblieben iſt. „ Das andere iſt das **Carſteniſche**, das unter dem Titel Matheſis Theoretica elementaris atque ſublimior 1760. zu Rockſtock herauskam, und nebenher ein Auszug aus der Euleriſchen Introd. in Analyſ. finit. und Infinitorum iſt. Das dritte iſt das **Käſtneriſche** vom Jahr 1759 — 61. welches unſeres Erachtens das beſte iſt, weil es das Beſte aus allen ſowohl deutſchen als engliſchen und franzöſiſchen neuen Schriftſtellern der Methematik in ſich enthält, und auf eine überzeugende Art, wiewohlen nicht überall für Anfänger, ſondern vorzüglich für geübte Leſer, vorträgt.

Allgemeine Begriffe von algebraiſchen und höhern Funktionen.

§. 877. **Erklär.** Wenn der Werth einer veränderlichen Größe, das iſt einer ſolchen, die gröſſer oder kleiner werden kann, durch eine andere ebenfalls veränderliche Gröſſe mit Zuziehung beſtändiger Gröſſen ſo beſtimmt wird, daß, man mag für die veränderlichen Gröſſen ſetzen, was man will, die Beſtimmung allemal ſich anwenden läßt; ſo ſagt man, eine Gröſſe ſey eine Funktion von der andern.

§. 878. **Erläuterung.** Wir wollen die Sache mit Exempeln deutlich machen. Wenn $y = \frac{bx}{a}$, ſo iſt y eine Funktion von x, und x eine Funktion von y: b und a ſollen beſtändige Größen ſeyn, die immer einerley Werth haben, y und x mag ſeyn und werden, was es will. Ferner der Werth von y ſoll nicht verändert werden, ohne daß auch der Werth von x verändert werde, woferne die Gleichung bleiben ſoll; welches man in dem Exempel leicht ſieht; denn wenn $\frac{b}{a}$ unveränderlich iſt, und y gröſſer wird, ſo muß auch x größer werden, geſetzt daß in allen möglichen Fällen $y = \frac{bx}{a}$ ſey. Dieſe Größen y und x, die Funktionen von einander ſind, heißt man deßwegen veränderliche Gröſſen, weil man alle mögliche Größen und Zahlen, ganze und gebrochene, poſitive und negative, rationale und irrationale, ja ſelbſt

un-

unmögliche Größen (imaginarias quantitates) ſogar auch Nulle davor ſetzen kann, um hernach zu ſehen, was aus der andern veränderlichen Größe, deren Funktion ſie iſt, bey dieſer Veränderung werde.

§. 879. **Erklär.** Die Funktionen werden in algebraiſche und transſcendentiſche eingetheilt. Eine algebraiſche Funktion iſt, die ſich durch gerade Linien und ihre Verbindung untereinander ſo ausdrücken läßt, daß man ſie zuletzt auf die Elementargeometrie reſolviren kann; wie den obigen Ausdruck, wo $y = \frac{bx}{a}$ eine gerade Linie iſt; oder wie bey dem Zirkel, wo $y^2 = ax - x^2$, welches die Gleichung für die Zirkel iſt §. 535. Die algebraiſchen Funktionen ſind ferner entweder einförmig oder vielförmig (uniformes vel multiformes) jene haben nur einen Werth, wenn man für die veränderliche Gröſſe eine Zahl ſetzt; dieſe haben mehrere; z. E. bey den quadratiſchen Gleichungen zwey, bey den kubiſchen drey, u. ſ. w. nach §. 331. Sie heiſſen daher zweyförmig, dreyförmig u. ſ. w. (biformes, triformes &c. functiones). Eine weitere Eintheilung iſt die Theilung der Funktionen in gleichnamige und ungleichnamige, (homogeneæ & heterogeneæ) jene haben gleiche Dimenſionen in den veränderlichen Größen, z. E. $\alpha y = \beta z$, wo die Funktion gleichnamig, und von einer Dimenſion iſt. Die heterogeneæ haben ungleiche Dimenſionen. Endlich werden dieſe algebraiſchen Funktionen noch in komplexe und in unkomplexe (complexas & incomplexas) oder vermiſchte und unvermiſchte eingetheilt; bey dieſen iſt nur eine veränderliche Gröſſe, die einen Exponenten haben kann, was man für einen will, und in eine beſtändige Größe multiplizirt iſt, z. E. $y = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$ iſt eine inkomplexe Funktion; alle andere heiſſen komplexe Funktionen. Diejenigen Funktionen, die ſich nicht algebraiſch ausdrücken laſſen, ſind transſcendentiſche Funktionen, ſo ſind die Sinus und Bögen transſcendentiſche Funktionen voneinander.

§. 880. Zuſatz. Wenn P, Q, R einförmige Funktionen von x ſind, ſo iſt der Ausdruck $y^2 + Py + Q = 0$, der allgemeine Ausdruck für alle zweyförmige Funktionen für x, und der $y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$ für alle dreyförmige, und der $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} + Ry^{n-3}$ ——— $= 0$ für alle vielförmige.

§. 881. Zuſatz. Weil ſich eine unbeſtimmte Linie geometriſch ziehen läßt, ſo laſſen ſich algebraiſche Funktionen durch Linien ausdrücken. Denn man ziehe eine Linie von unbeſtimmter Länge, und nenne ſie x, es ſey z. E. *Fig.* 108. die Linie AH, man ſetze den Punkt A, wo ſie anfangen ſoll; von A nach M ſoll ſie von andern Linien, wie MP, geſchnitten, das iſt, durch dieſe Linien ſollen gewiſſe Theile der unbeſtimmten Linie, wie AF, AP abgeſchnitten werden, ſo wird allemal durch dieſen Schnitt ein gewiſſer Theil beſtimmt werden; welcher nach und nach alle mögliche Werthe von x beſtimmt; denn wenn man die Linie in den Anfangspunkte A ſchneidet, ſo iſt $x = 0$, geht man rückwärts gegen T, ſo iſt x negativ; poſitiv aber gegen H.

§. 882. Anmerk. Man ſieht hieraus, wie der Name der Abſciſſen entſtanden; denn dieſe Linie AH heißt die Abſciſſenlinie, und eine jede darauf abgeſchnittene Linie eine Abſciſſe.

§. 883. Erklär. Die Linie, welche auf dieſe Weiſe abgeſchnitten wird, heißt die Abſciſſe, AP, AH, und die Linie, welche ſie ſchneidet, die Ordinate.

§. 884. Anmerk. Wenn *Fig.* 60. $CA = a$, $AB = b$, $AD = x$, $DE = y$ geſetzt wird; ſo iſt nach §. 527. $y = \frac{bx}{a} = DR$; ein allgemeiner Ausdruck aller Parallelen mit AB, zwiſchen den Schenkeln CA und CB. Eben ſo *Fig.* 59. wenn $AB = a$, $AD = x$ die Abſciſſe, und $DE = y$ geſetzt wird: ſo iſt, weil $AD : DE = DE : DB = AB - AD$; $x : y = y : a - x$, folgl. $ax - xx = y^2$ der algebraiſche Ausdruck für alle Zirkel.

§. 885.

§. 885. **Zuſatz.** Wenn eine homogeniſche Funktion von zwo veränderlichen Größen gegeben iſt, und man ſetzt für die eine veränderliche Größe das Produkt der andern in eine dritte, die u heiſſen ſoll, ſo kann man die eine veränderliche Größe hinwegſchaffen. Denn es ſey

$V = \frac{y + z}{y - z}$, man ſetze für $y = uz$ ſo iſt;

$$V = \frac{uz + z}{uz - z} = \frac{(u + 1)z}{(u - 1)z} = \frac{u + 1}{u - 1}$$

Wenn alſo y und z mehr, z. E. n Dimenſionen hätten, ſo würde es auch angehen, wie man es leicht auf eine ähnliche Weiſe berechnen kann.

§. 886. Exempel. Es ſey $V = \frac{y - \sqrt{y^2 - z^2}}{z}$,

Man ſetze $y = uz$, ſo hat man

$$V = \frac{uz - \sqrt{(u^2 - 1)z^2}}{z} = \frac{uz - z\sqrt{(u^2 - 1)}}{z} = u - \sqrt{u^2 - 1}.$$

Die algebraiſchen Linien, beſonders die Kegelſchnitte, oder die Parabel, Ellipſe und Hyperbel.

§. 887. **Erklär.** Ein Kegel *Fig.* 107. kann auf verſchiedene Weiſe von einer ebenen Fläche geſchnitten werden; 1) durch den Scheitel, in welchem Fall ein Dreyeck entſteht, 2) mit der Grundfläche parallel, da es einen Zirkel giebt, welcher auch entſteht durch die ſogenannte ſectionem ſubcontrariam bey einem ungleichſeitigen Kegel (cono ſcaleno), (*)

(*) „ Dieſer Schnitt geſchieht, wenn der Winkel, den der Diameter des Durchſchnittes mit der einen Seite des Kegels beſtimmt, eben ſo groß wird, als der Winkel, den die andere Seite des Kegels mit dem Diameter ſeiner Grundfläche macht. Er wird vornehmlich bey perſpektiviſchen, und aſtronomiſchen Projektionen genutzet. **Clemms** erſte Gründe d. m. W. Geometr. III. Kap. S. 493.

3) durch einen parallelen Schnitt mit einer Seite DC, da eine Parabel herauskömmt, 4) durch einen ſchiefen Schnitt von A gegen C, daß der Schnitt auf beyden Seiten durchgeht, woraus eine Ellipſe entſteht, und endlich 5) durch einen ſenkrechten Schnitt, der ſich herabwärts immer weiter von des Kegels entgegengeſetzter Seite DC entfernt, und wenn der Schnitt oberhalb verlängert würde, einen gleichen umgekehrten Kegel, der auf D ſtünde, eben ſo ſchneiden würde.

§. 888. Anmerk. Das Dreyeck und der Zirkel iſt in der Elementargeometrie betrachtet worden, man betrachtet alſo hier nur die drey letzteren Schnitte.

§ 889. Anmerk. Die Urſache ihrer Benennung muß man aus der griechiſchen Sprache entlehnen, und die Wörter hernach mit den Definitionen dieſer krummen Linien vergleichen. Parabola heißt eine Gleichheit; und die erſte koniſche Sektion bekam deßwegen dieſen Namen, weil in derſelben das Produkt aus einer beſtändigen Linie AK in die Abſeiſſe allemal dem Quadrat der Semiordinate gleich iſt. Ellipſis heißt ein Defekt, ein Mangel; und die zweyte koniſche Sektion heißt deßwegen ſo, weil das Quadrat der Semiordinate etwas weniger als das obige Produkt iſt. Hyperbola heißt ein Ueberfluß, was größer iſt; und die dritte koniſche Sektion heißt deßwegen ſo, weil das Quadrat ihrer Semiordinaten größer iſt, als das obige Produkt.

§. 890. Erklär. Die Linien, wo die Abſciſſen oder die Werthe von x angenommen werden, heiſſen in allen algebraiſchen Linien die Abſciſſenlinien, und zwar die Axe, wenn die Ordinate perpendikular darauf ſteht, oder welches gleichviel iſt, wenn der Ordinatenwinkel ein rechter iſt, wie *Fig.* 108. 109 110., wo PM auf AP lothrecht ſteht. AP, AH ſind Abſciſſen, PM, FN ſind Ordinaten, (ordinatim applicatæ); A *Fig.* 108. iſt der Anfang der Abſciſſen, der Scheitel (*Vertex*). Ordinaten und Abſciſſen zuſammen heiſſen Koordinaten; und ſind Funktionen voneinander; (die Alten haben die Sehnen der Kegelſchnitte Ordinatas und ihre

Hälften

Hälften Semiordinatas genannt). Der Buchſtabe x bedeutet insgemein die Abſciſſe, wenn nicht was anders dabey erinnert wird, und y die Ordinate. Der **Parameter** iſt die beſtändige Linie, welche a oder b genannt wird (*).

Die Parabel

§. 891. **Erklär.** Wenn die Koordinaten rechtwinklicht ſind, ſo heißt diejenige krumme Linie, in welcher $ax = y^2$ die **Parabel**; a iſt der Parameter; alſo hier die dritte Proportionallinie zur Abſciſſe und Semiordinate; und y oder die Ordinate iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Parameter und der Abſciſſe. Denn $x : y = y : a$.

Beweis der Gleichung für die Parabel.

(*Fig.* 107.) AMG iſt eine Parabel; man ſchneide den Kegel durch eine andere mit der Grundfläche parallele Fläche NMO; ſo wird, weil die halbe Grundlinie des Durchſchnitts in der Parabel auf den Durchmeſſer der Grundfläche des Kegels ſenkrecht aufſtehen muß, auch PM auf NO ſenkrecht ſeyn, wie es $G\pi$ auf BC ſeyn muß; es iſt alſo,

$$PM^2 = NP \times PO$$

Man nenne $PM = y$, $AP = x$, den Parameter $= a$, und ſuche ſtatt NP und OP andere Werthe; dieſe findet man aus den ähnlichen Dreyecken; erſtens iſt

$$\Delta AD\alpha \sim \Delta ANP;\ \text{alſo}$$
$$D\alpha : A\alpha = AP : NP = \frac{AP \times A\alpha}{D\alpha}$$

Zwey=

(*) Der **Parameter** iſt eigentlich das Produkt zwoer beſtändigen Linien, durch eine dritte beſtändige Linie dividirt; beſtändige Linien aber heiſſen ſolche, die in einem und demſelben Kegelſchnitte nicht verändert werden können. z. B. Die groſſe und kleine Axe der Ellipſe, die Zwerchachſe der Hyperbel, die Seiten, der Durchmeſſer der Grundfläche des Kegels ꝛc.

Zweytens iſt $A\alpha = PO$ weil ſie Parallelen zwiſchen Parallelen ſind; alſo wenn man dieſen Werthe ſubſtituirt, iſt

$$PM^2 = AP \times \frac{A\alpha \cdot A\alpha}{D\alpha} = AP \times \frac{A\alpha^2}{D\alpha}$$

Aber aus der Erklärung (§. 890. Anmerk.) iſt $\frac{A\alpha^2}{D\alpha} = a$;

alſo iſt $y^2 = ax$.

§. 892. **Zuſatz.** Weil bey rechtwinklichten Koordinaten in der Parabel $y^2 = ax$, ſo iſt $y = \pm\sqrt{ax}$, folglich gehören jeder Abſciſſe zwo entgegengeſetzte gleiche Semiordinaten zu.

§. 893. **Zuſatz.** Iſt $x = 0$, ſo iſt auch $ax = 0$, folglich auch $y = 0$, daher die Axe der Parabel im Anfange der Abſciſſen geſchnitten wird.

§. 894. **Zuſatz.** Iſt x negativ, ſo iſt auch ax negativ, weil a immer poſitiv iſt, folglich $y^2 = -ax$, und $y = \sqrt{-ax}$, eine unmögliche Gröſſe; alſo giebt es keine Ordinaten für die verneinten Abſciſſen in der Parabel, und die Parabel hat nur zwo unendliche Schenkel (Ramos) zu beyden Seiten der Axe, weil poſitiv $ax = y^2$ unendlich wachſen kann.

§. 895. **Erklär.** Der Brennpunkt iſt derjenige Punkt der Axe der krummen Linie, wo die Ordinate, oder nach der Sprache der Alten, die Semiordinate dem halben Parameter gleich iſt.

§. 896. **Lehrſatz.** Der Brennpunkt in der Parabel iſt um den vierten Theil des Parameters von dem Scheitelpunkte entfernt; das iſt: wenn dieſe Diſtanz x heiſſet.

Satz. *Fig.* 108.

$x = \frac{1}{4}a$.

Bew.

Beweis.

$ax = y^2$ Erklär. der Parabel §. 891.
$y = \frac{1}{2}a$ Erklär. des Brennpunkts §. 895. ſubſt.

$ax = \frac{1}{4}a^2$

: a

$x = \frac{1}{4}a.$

§. 897. Zuſatz. Die Differenz zwiſchen der Abſciſſe AP und der Diſtanz vom Scheitelpunkt AF iſt alſo $= AP - AF = x - \frac{1}{4}a = PF.$

§. 898. Zuſatz. Eine jede gerade Linie vom Brennpunkte an die Krümmung der Parabel, wie die Linie FM, iſt der Abſciſſe AP und der Diſtanz des Brennpunkts vom Scheitel AF zuſammen gleich.

Satz. *Fig.* 108.

$FM = x + \frac{1}{4}a.$

Beweis.

$PM^2 = ax$ nach der Erkl. der Parabel §. 891.
$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$ §. 897. weil $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$

add.

$PM^2 + PF^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

. $\sqrt{}$ extr.

$\sqrt{(PM^2 + PF^2)} = x + \frac{1}{4}a.$ Aber
$\sqrt{(PM^2 + PF^2)} = FM$ nach dem Pyth. Lehrſatz

$FM = x + \frac{1}{4}a.$

§. 899. Lehrſ. Die Abſciſſen verhalten ſich, wie die Quadrate der Semiordinaten.

Satz. *Fig.* 108.

$AF : AP = FN^2 : PM^2.$

Beweis.

$AF \,.\, a = FN^2$ und $AP \,.\, a = PM^2$ §. 891. folgl.
$AF \,.\, a : AP \,.\, a = FN^2 : PM^2$
$\overline{\qquad\qquad} :a$

$AF : AP = FN^2 : PM^2$.

§. 900. Zuſatz. Folglich $\sqrt{AF} : \sqrt{AP} = FN : PM$, oder die Ordinaten verhalten ſich, wie die Quadratwurzel der Abſciſſen.

Die Ellipſe.

§. 901. Erklär. Die Ellipſe iſt diejenige koniſche Sektion oder krumme Linie, in welcher das Quadrat der Ordinate dem Produkt des Parameters in die Abſciſſe, weniger dem Produkt aus dem Quadrat der Abſciſſe in den durch die groſſe Axe dividirten Parameter gleich iſt. Der Parameter heiſſe = b, die gröſſere Axe *Fig.* 109. AB = a, ſo iſt $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ die Definition der Ellipſe, wenn man die Abſciſſen vom Scheitelpunkt A an rechnet.

Beweis. *Fig.* 107. AmC iſt eine Ellipſe. Man ſetze Ap = x; pm = y, AC = a, alſo iſt pC = a — x; und weil NMO ein Zirkel iſt, ſo iſt $pm^2 = Np \,.\, pO$; ſtatt dieſen beyden Linien andere Werthe zu ſetzen, betrachte man die Dreyecke;

$\Delta ANp \backsim \Delta ABC$; es iſt alſo

$AC : BC = Ap : pN = \frac{Ap \,.\, BC}{AC}$.

Auch $\Delta A\alpha C \backsim \Delta OpC$, und daher

$AC : pC = A\alpha : pO = \frac{pC \,.\, A\alpha}{AC}$,

Dieſe

Dieſe Werthe ſubſtituirt geben

$$pm^2 = \frac{Ap \,.\, BC \,.\, pC \,.\, A\alpha}{AC \,.\, AC}$$ oder

$$pm^2 = \frac{Ap \,.\, pC}{AC} \times \frac{BC \,.\, A\alpha}{AC}.$$

Es iſt aber $\frac{BC \,.\, A\alpha}{AC}$ ein Produkt zwoer beſtändigen Linien durch eine dritte beſtändige dividirt; folglich der Parameter $= b$, $pm = y$, $AC = a$, $Ap = x$, $pC = a - x$; alſo

$$y^2 = \left(\frac{(a-x)\,x}{a}\right) b \,. = \left(\frac{ax - x^2}{a}\right) b = \frac{abx - bx^2}{a} = bx - \frac{bx^2}{a}.$$

§. 902. Zuſatz. Wenn $y = o$, ſo iſt $x = o$ oder $x = a$; denn unter der Bedingung daß $y^2 = o$, iſt auch $bx - \frac{bx^2}{a} = o$, folglich $abx = bx^2$, welches wahr iſt, wenn $x = o$, aber auch wahr bleibt, wenn $x = a$; denn wenn man beyderſeits mit bx dividirt, ſo iſt der Quotient $a = x$.

§. 903. Zuſatz. Folglich wird die Axe zweymal von der Ellipſe geſchnitten, und die Abſciſſenlinie geht nicht unendlich fort.

§. 904. Zuſatz. Weil $y = \pm \sqrt{\left(bx - \frac{bx^2}{a}\right)}$ ſo gehören zu jeder Abſciſſe zwo gleiche entgegengeſetzte Semiordinaten.

§. 905. Erklär. Wenn die groſſe Axe AB in C in zween gleiche Theile getheilt wird, ſo heißt der Punkt C der Mittelpunkt, und die Ordinate von C aus doppelt genommen die kleinere Axe = 2CD. *Fig.* 109. (Axis conjugatus).

§. 906.

Digitized by Google

§. 906. **Zuſatz.** Weil die Abſciſſe $x = \frac{1}{2}a$, wenn y der halben kleinen Axe gleich iſt, ſo darf man in der Gleichung nur für x überall $\frac{1}{2}a$ ſetzen, ſo hat man die kleine Axe; denn in dieſem Fall $y^2 = \frac{1}{2}ba - \frac{1}{4}\frac{ba^2}{a} = \frac{1}{2}ba - \frac{1}{4}ba = \frac{1}{4}ba$; und $y = \frac{1}{2}\sqrt{ba}$. folglich $2y = \sqrt{ba}$.

§. 907. **Zuſatz.** Man nenne $2y$ die kleine Axe $= c$, ſo iſt $c^2 = ab$; und $\frac{c^2}{a} = b$; auch nach §. 901. $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$.

§. 908. **Zuſatz.** Wenn $c = a$, ſo iſt $y^2 = ax - x^2$, die Gleichung für den Zirkel; in welchem Fall $c = a = b$, das iſt, Parameter und beyde Axen einander gleich ſind.

§. 909. **Lehrſatz.** Wenn die Abſciſſen von dem Mittelpunkt an gerechnet werden, und eine ſolche Abſciſſe wie **PC** von **C** an gerechnet, wird geſetzt $= u$, ſo iſt die Gleichung für die Ellipſe $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} = y^2$.

Beweis.

$CP = u$ nach der Vorausſetzung; folglich $x = AP = AC - CP = \frac{1}{2}a - u$. daher nach §. 907. ſubſtit.

$$\frac{c^2}{a}\cdot\left(\tfrac{1}{2}a - u\right) - \frac{c^2}{a^2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}a - u\right)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} = y^2.$$

§. 910. **Zuſatz.** Auf beyden Seiten von **C**, zur Rechten und zur Linken, geben gleiche u einerley y, folglich wird die Ellipſe in zwo gleiche Hälften in **C** getheilt.

§. 911.

§. 911. **Lehrſatz.** Die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich wie die Produkte aus den Segmenten der Axe.

Satz. *Fig.* 109.

$$FG^2 : PM^2 = AF \,.\, FB : AP \,.\, PB.$$

Beweis.

$$FG^2 = b\left(AF - \frac{AF^2}{a}\right) \text{ und } PM^2 = b\left(PM - \frac{PM^2}{a}\right)$$

nach §. 901.

$$\text{folglich } FG^2 : PM^2 = b\left(AF - \frac{AF^2}{a}\right) : b\left(PA - \frac{PA^2}{a}\right)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : \frac{b}{a}$$

$$= AF \,.\, a - AF^2 : PA \,.\, a - PA^2$$
$$= AF\,(a - AF) : PA\,(a - PA) \text{ d. i.}$$

in der Figur

$$FG^2 : PM^2 = AF \,.\, FB : PA \,.\, PB.$$

§. 912. **Lehrſatz.** Die Ellipſe hat zween vom Scheitel gleichweit entfernte entgegengeſetzte Brennpunkte, welche durch die halbe Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate der beyden Axen beſtimmt werden.

Satz. *Fig.* 109.

$$CF = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

Beweis.

$$\tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2\,CF^2}{a^2} \text{ nach §. 909. vergl. mit §. 895.}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 = \frac{c^4}{4a^2} \text{ nach §. 907.;} \qquad \text{folglich}$$

$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2CF^2}{a^2}$; folglich herüber geſetzt

$\frac{c^2CF^2}{a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^4}{4a^2}$

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : \frac{c^2}{a^2}$ oder $\cdot \frac{a^2}{c^2}$

$CF^2 = \frac{1}{4}\frac{c^2a^2}{c^2} - \frac{a^2c^4}{4a^2c^2}$; das iſt:

$CF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$; und daher

$CF = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$.

§. 913. Anmerk. Dieſes iſt die Weite der Brennpunkte vom Mittelpunkt, will man ihre Weite vom Scheitel wiſſen, ſo muß man noch $\frac{1}{2}a$ addiren.

§. 914. **Lehrſatz.** Die Summe zwoer Linien aus beyden Brennpunkten an einen und eben denſelben Punkt der Peripherie der Ellipſe gezogen, iſt der groſſen Axe gleich.

Satz. *Fig.* 109.

$FM + fM = AB$.

Beweis.

Es ſey $FC = fC = e$.; ſo iſt, weil

$PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$; $Pf = Cf + PC = e + \frac{1}{2}a - x$;

und $PF = CF - PC = e - \frac{1}{2}a + x$, folglich

$PF^2 = e^2 - ae + \frac{1}{4}a^2 + 2ex - ax + x^2$

$= (\frac{1}{2}a - e)^2 + 2ex - ax + x^2$.

$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + (4e^2x^2) : a^2$ (*)

(*) Um dieſes zu verſtehen iſt folgende Erläuterung vonnöthen.

$PM^2 : CD^2 = AP \times PB : AC^2$ §. 911.

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ oder da

$CD^2 = 4y^2 = \frac{1}{4}ab$ §. 906.

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ſo iſt

PM²

$PM^2 : \frac{1}{4}ab = ax - x^2 : \frac{1}{4}a^2$

Nun aber muſs ſtatt ein $\frac{1}{4}ab$ noch ein anderer Ausdruck ohne Parameter gefunden werden; welches auf folgende Art geſchieht.

Wenn man von F bis D eine Linie zieht, ſo iſt

$FD^2 = DC^2 + FC^2$ nach dem pyth. Lehrſ.

und weil

$DC^2 = \frac{1}{4}ab$ §. 906

$FC^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ §. 912

$\frac{1}{4}c^2$ aber (da c die kleine Axe iſt eben nach §. 906) $= \frac{1}{4}ab$

ſo iſt

$FD^2 = \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$

und reduzirt

$FD^2 = \frac{1}{4}a^2$

Es iſt aber $CD^2 = FD^2 - FC^2$ pyth. Lehrſ.

ſo iſt auch

$CD^2 = \frac{1}{4}a^2 - e^2$

folglich kann ſubſtituirt werden.

$PM^2 : \frac{1}{4}a^2 - e^2 = ax - x^2 : \frac{1}{4}a^2$

$PM^2 = \frac{(\frac{1}{4}a^2 - e^2) \cdot (ax - x^2)}{\frac{1}{4}a^2}$;

dieſes nun wirklich multiplizirt und dividirt giebt.

$PM^2 = ax - x^2 = \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$.

Nr. I. $PF^2 + PM^2 = FM^2 = (\frac{1}{2}a - e)^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$; folglich

$FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$.

Eben ſo iſt

Nr. II. $Pf^2 = e^2 + ae + \frac{1}{4}a^2 - 2ex - ax + x^2$ (*)
$= (\frac{1}{2}a + e)^2 - 2ex - ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$

$PM^2 + Pf^2 = fM^2 = (\frac{1}{2}a + e)^2 - 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$. folglich

$fM = \frac{1}{2}a + e - \frac{2ex}{a}$ Aber

Nr. I. $FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$; folgl. add.

$FM + fM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a = AB.$

§. 915. Anmerk. Eben dieſer Beweis gilt von allen andern Linien; ſo iſt FE und fE zuſammen auch = a u. ſ w.

§. 916. Lehrſatz. Eine jede Ellipſe läßt ſich mit der Parabel ſo vergleichen, daß man die Parabel eine Ellipſe nennen kann, deren Axe unendlich iſt. Das iſt, je größer a wird, deſto geringer wird der Unterſchied der Quadrate der beyderſeitigen Ordinaten. Denn es ſey *Fig.* 109. AN das Stück einer Parabel, AM einer Ellipſe, die gemeinſchäftliche Abſciſſe AP = x, die Semiordinate der erſtern PN = z, der andern PM = y; ſo iſt

I. in der Parabel $z^2 = bx$

II. in der Ellipſe $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$; ſubtrahirt

$z^2 - y^2 = \frac{bx^2}{a}$. Nun ſey

a

(*) Weil oben $Pf = Cf + PC = e + \frac{1}{2}a - x$; folglich $Pf^2 = (e + \frac{1}{2}a - x)^2$

$$a = \infty \text{; ſo iſt}$$

$$z^2 - y^2 = \frac{bx^2}{\infty} \text{; aber}$$

$$\frac{bx^2}{\infty} = 0 \quad \text{Vel quavis data minor quantitas.}$$

$$x^2 - y^2 = 0.$$

§. 917. Anmerk. Weil die Axe niemals wirklich unendlich wird, ſo ſagt man, der elliptiſche Bogen komme dem paraboliſchen immer näher, je gröſſer die Axe ſey. Uebrigens hat man dieſen Lehrſatz in der Aſtronomie nöthig, wenn von den Laufbahnen der Kometen die Rede iſt, die eine ſo exzentriſche Laufbahn haben, daß man ihre Ellipſe, darinn ſie ſich bewegen, ohne Fehler für eine paraboliſche Laufbahn annehmen kann.

Die Hyperbel.

§. 918. Erklär. Die Hyperbel iſt diejenige koniſche Sektion, in welcher $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, wenn die Buchſtaben das bedeuten, was ſie bey der Ellipſe bedeutet haben. Denn man darf nur für die Gleichung in der Ellipſe — a ſtatt + a ſetzen, ſo hat man die obige Gleichung der Hyperbel; und in ſofern kann man die Hyperbel als eine Ellipſe von einer negativen Axe anſehen.

Ein klärerer Beweis aus der Figur iſt folgender:

(*Fig.* 107) $\alpha\mu$ iſt eine Hyperbel; Es ſey die Zwerchachſe $\alpha I = a$; die Abſciſſe $\alpha\pi = x$; die Semiordinate $\pi\mu = y$; ſo wird $\pi I = a + x$, und $\pi\mu^2 = B\pi \cdot \pi C$ ſeyn, oder

$$B\pi : \pi\mu = \pi\mu : \pi C$$

Man ſuche nun anſtatt $B\pi$ und πC andere Werthe;

Erſtens iſt $\Delta KI\alpha = \Delta \alpha C\pi$, folglich

$$I\alpha : \alpha\pi = KI : \pi C.$$

und

$$\pi C = \frac{\alpha\pi . KI}{I\alpha}$$

Zweytens $\Delta IB\pi \backsim \Delta IA\alpha$; alſo

$$I\alpha : I\pi = A\alpha : B\pi$$

, mithin

$$B\pi = \frac{I\pi . A\alpha}{I\alpha}$$

Dieſe beyden Werthe ſubſtituirt

$$\pi\mu^2 = \frac{\alpha\pi . KI . I\pi . A\alpha}{I\alpha . I\alpha}$$

oder

$$\pi\mu^2 = \frac{\alpha\pi . I\pi}{I\alpha} . \frac{KI . A\alpha}{I\alpha}$$

Es iſt aber $\frac{KI \times A\alpha}{I\alpha}$ ein Produkt zwoer beſtändigen Linien durch eine dritte beſtändige Linie dividirt, folglich der Parameter $= b$; $\pi\mu = y$, $\alpha\pi = x$; $I\pi = \alpha + x$; $I\alpha = a$, alſo ſubſtituirt

$$y^2 = \left(\frac{x.(a+x)}{a}\right) b = \left(\frac{ax+x^2}{a}\right) b = \frac{abx + bx^2}{a}$$

$$= bx + \frac{bx^2}{a}$$

§. 919. Zuſatz. Wenn $y = 0$, ſo iſt x entweder $= 0$ oder $= -a$, wie §. 902. bey der Ellipſe.

§. 920. Zuſatz Wenn man die kleine Axe auch nach der Aehnlichkeit der Ellipſe ausdrücken wird, ſo heißt $\sqrt{-ab}$ eine unmögliche Gröſſe; folglich giebt es auf der Zwerchaxe, (ſo wird die Axe AB *Fig.* 110. axis transverſus, genannt,) keine Semiordinate.

§. 921. Zuſatz. Wenn die Abſciſſe negativ genommen gröſſer wird als die Zwerchaxe a, ſo giebt es auf der ent-

entgegengeſetzten Seite wieder Ordinaten; denn $y^2 = \frac{bx}{a}$. $(a + x)$ giebt ein poſitives Quadrat; weil hier die beyden Faktores x und a + x negativ ſind, folglich ihr Produkt poſitiv wird; daher hat die Hyperbel vier unendliche entgegengeſetzte Schenkel; weil x poſitiv und negativ unendlich wachſen kann.

§. 922. **Erklär.** Wenn man die Zwerchaxe AB in zwo gleiche Theile theilet, ſo heißt C der Mittelpunkt der Hyperbel.

§. 923. **Zuſatz.** Bildet man ſich eine kleine Axe (*) in der Hyperbel ein, die man wie bey der Ellipſe = c ſetzet, ſo iſt nach §. 907. eine ähnliche Gleichung für die Hyperbel $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, da man nur ſtatt — ſetzet +.

§. 924. **Zuſatz.** Eben ſo; wenn die Abſciſſen von dem Mittelpunkt C an gerechnet werden, iſt nach §. 909. mit einer ähnlichen Veränderung $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

§. 925. **Zuſatz.** Auf gleiche Weiſe ſind kraft des Gegenſatzes §. 912. die Brennpunkten der Hyperbel $= \mp \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a}$, wenn man ſie von dem Mittelpunkt C an rechnet.

§. 926. **Zuſatz.** Endlich erhellet eben ſo aus §. 914., daß die Zwerchaxe immer der Differenz zwoer Linien aus den beyden Brennpunkten F und f, an einen Punkt der Hyperbel M gezogen, gleich ſey, das iſt: fM — FM = a.

(*) Sie iſt, wie in der Ellipſe die mittlere Proportional zwiſchen der Zwerchaxe und dem Parameter.

§. 927. **Erklär.** Die Aſymptoten der Hyperbel ſind aus dem Mittelpunkt gezogene Linien, welche den Schenkeln der Hyperbel ſich unendlich nähern, und doch niemals mit ihnen zuſammen fallen, ſondern immer einen Zwiſchenraum laſſen.

Ihre geometriſche Erklärung iſt folgende: Man beſchreibt *Fig.* 110. mit der Ordinate PM, Pm durch den Scheitelpunkt der Hyperbel A die Parallele DE, ſo, daß DA=AF=AE der halben kleinen Axe werden; wodurch man die Punkte D und E beſtimmt erhält; aus dem Mittelpunkt C zieht man durch D und E die geraden Linien CDQ, CEq ſo weit man will, ſo werden ſie die Aſymptoten ſeyn. Eben ſo können ſie auch auf die entgegengeſetzte Seite kontinuirt werden.

§. 928. **Lehrſatz.** Die Aſymptoten fallen niemals mit den Schenkeln der Hyperbel zuſammen, weil die Differenz der Quadrate von den beyden Ordinaten PM und PR eine beſtändige Gröſſe, nämlich der vierte Theil des Produkts aus dem Parameter in die Zwerchaxe, d. i. des Quadrats der halben kleinen Axe iſt, welches Produkt niemals Nulle werden kann.

Satz. *Fig.* 110.

$$PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}c^2.$$

Beweis.

Weil C der Mittelpunkt iſt, ſo iſt $CA = \tfrac{1}{2}a$; $CP = CA + AP = \tfrac{1}{2}a + x$, und die halbe kleine Axe (*) $DA = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab} = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab}$; folglich, $\triangle CDA \sim \triangle CRP$ weil;

CA,

(*) Weil aus der Erklärung

$a : DE = DE : b$ mithin $ab = DE^2$

$\sqrt{ab} = DE$, und auch $\tfrac{1}{2}\sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}DE = DA.$

CA : AD = CP : PR ; ſo iſt in kleinen Buchſt.

$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR$; alſo

$PR = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$, wenn man wirklich dividirt;

dieß quadrirt giebt

$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + \frac{bx^2}{a}$. Es iſt aber nach §. 918.

$PM^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$ ſubtr.

$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}c^2$.

§. 929. Anmerk. Der Name Aſymptote iſt aus dem Griechiſchen zu erklären; dem Wort nach iſt ſie eine Linie, die mit einer andern niemals zuſammen fällt; der Bedeutung nach muß man noch hinzuſetzen: unerachtet ſie ſich derſelben unendlich nähert. Aus dieſer Aehnlichkeit hat Herr von Leibnitz die endlichen Geiſter Aſymptoten von Gott genannt.

§. 930. Lehrſatz. Wenn man *Fig.* 110. AI mit CD parallel zieht, ſo iſt EI = CI = AI.

Satz. *Fig.* 110.

CI = EI = AI.

Beweis.

Nr. I. EA : ED = AI : DC ; aber
EA : ED = $\frac{1}{2}$: 1

AI : DC = $\frac{1}{2}$: 1, folgl. AI = $\frac{1}{2}$DC. Aber
$\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$CE; daher

AI = $\frac{1}{2}$CE Nr. II.

Nr. III. $EA : AD = EI : IC$; aber

$EA = AD$; folglich

$EI = IO = \frac{1}{2} CE$. Nach der Figur

aber Nr. II. $AI = \frac{1}{2} CE$; folglich

$EI = IC = AI$.

§. 931. **Erklär.** Das Quadrat von CI, das iſt: CI^2 heißt die Potenz der Hyperbel, oder weil $AI = CI$, iſt auch AI^2 die Potenz der Hyperbel.

§. 932. **Lehrſatz.** Die Potenz der Hyperbel iſt der ſechzehnte Theil von der Summe der Quadrate der beyden Axen.

Satz. *Fig.* 110.

$$CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

Beweis.

$CE^2 = CA^2 + AE^2$; aber $CA = \frac{1}{2} a$, und $AE = \frac{1}{2} c$, folgl.

$CE^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2$, und $CE = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2)}$

$CI = \frac{1}{2} CE = \frac{1}{2} \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2)}$; und quadrirt

$CI^2 = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} c^2) = \frac{a^2 + c^2}{16}$.

§. 933. **Lehrſatz.** Die Linien zwiſchen den Aſymptoten und Schenkeln der Hyperbel RM und rm ſind gleich.

Satz. *Fig.* 110.

$$RM = rm$$

Be-

Beweis

Nr. I. $CA : AD = CP : PR$

$$\frac{AD \cdot CP}{CA} = PR.$$

Aber Nr. II. $\frac{AD \cdot CP}{CA} = Pr$

$$PR = Pr$$

$$PM = Pm \text{ ſubtr.}$$

$PR - PM = Pr - Pm$; das iſt in der Figur

$$RM = rm.$$

Nr. II. $CA : AE = CP : Pr.$

$$AE = AD$$

$$CA : AD = CP : Pr.$$

$$\frac{AD \cdot CP}{CA} = Pr.$$

§. 934. **Lehrſatz.** Wenn man QM parallel mit CI zieht, ſo iſt CQ . QM der Potenz der Hyperbel gleich.

Satz. *Fig.* 110.

$$CQ . QM = a^2 + c^2.$$

16

Beweis

$\Delta RQM \backsim \Delta RCr$ folgl.

$CQ : Mr = QR : RM$ und weil $\Delta QRM \backsim \Delta CDE$ wegen $CDE \backsim RCr$

Nr. I. - $QR : RM = DC : ED$

$ED : DC = Mr : CQ$; es ſey $Pr = z$, ſo iſt

$Pr + PM = Mr = y + z$;

weil $DC^2 = CA^2 + AB^2$

und $DC = \sqrt{(CA^2 + AB^2)} = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$

ſo iſt in c : $\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} = y + z : CQ$

Buchſt.

$$\frac{(y+z) \cdot (\sqrt{a^2+c^2})}{2c} = CQ.$$

Nr. II. RM = z — y. nach Nr. I. = PR — PM.; aber

$$z^2 - y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 \quad \text{nach §. 928.}$$
$$z^2 - y^2 = (z+y) \,.\, (z - y)$$
$$(z+y) \,.\, (z-y) = \tfrac{1}{4}c^2 \quad : z+v$$
$$z - y = \frac{c^2}{4(z+y)} = RM$$

Nr. III. ED : EC = RM : MQ, d. i. weil EC = CD.

$$c : \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} = \frac{c^2}{4(z+y)} : MQ; \text{ alſo}$$
$$MQ = \frac{c^2}{4(z+y)} \,.\, \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}; \text{ aber}$$

Nr. I. $CQ = \frac{(y+z) \,.\, \sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$; dieß mit einander multiplizirt, giebt (*)

$$CQ \,.\, QM = \frac{(y+z) \,.\, \sqrt{(a^2+c^2)}}{2c} \,.\, \frac{c^2}{4(z+y)} \,.\, \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$$
$$= \frac{(a^2+c^2)\, c^2}{16c^2} = \frac{a^2+c^2}{16}.$$

(*) Denn $\frac{(y+z)}{2c} \,.\, \sqrt{a^2+c^2}$

$$\frac{c^2}{8c\,(y+z)} \,.\, \sqrt{a^2+c^2}$$

$$\frac{c^2(y+z)}{16c^2(y+z)} = \frac{1}{16}\,.\,(\sqrt{a^4+2a^2c^2+c^4}) = \frac{1}{16}(a^2+a^2) = \frac{c^2+c^2}{16}.$$

§. 935. **Erklär.** Wenn man CQ, QM als Koordinaten auf die Aſymptoten annimmt, und ſetzt CQ = p, QM = q, ſo iſt $pq = \frac{a^2+c^2}{16}$ die Gleichung der Hyperbel zwiſchen den Aſymptoten.

§. 936. **Zuſatz.** Iſt die Potenz der Hyperbel = 1, ſo iſt pq = 1, oder CQ . QM = 1.

§. 937. Wenn CA = AE, ſo iſt der Winkel ACE = AEC, und jeder 45°; weil bey A ein rechter iſt, und die Hyperbel gleichſeitig.

§. 938. **Erklär.** Die gleichſeitige Hyperbel iſt, deren beyde Axen und Parameter einander gleich ſind.

§. 939. **Zuſatz.** In einer gleichſeitigen Hyperbel iſt der Aſymptotenwinkel DCE = 2ACE = 90°, oder ein rechter Winkel; ſie heißt daher auch die rechtwinklichte Hyperbel.

§. 940. **Zuſatz.** Weil die allgemeine Erklärung der Hyperbel $y^2 = ax + \frac{bx^2}{a}$, ſo iſt für die gleichſeitige, wo $a = b$, die Gleichung $y^2 = ax + x^2$.

§. 941. **Zuſatz.** Wenn man die Abſciſſen vom Mittelpunkt an rechnet, und $CP = u$ geſetzt wird, ſo iſt $AP = CP - AC$, das iſt $x = u - \frac{1}{2}a$; folglich in der Fundamentalgleichung §. 923. der Werth von x ſubſtituirt, wo $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$ aus der kleinern Axe, giebt $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

§. 942. **Zuſatz.** Folglich giebt dieſe Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Allgemeine Betrachtungen der koniſchen Sektionen und Linien der zweyten Ordnung.

§. 943. **Lehrſatz.** In einer jeden koniſchen Sektion iſt die gerade Linie aus dem Brennpunkt an einen beliebigen Punkt der Peripherie, der Diſtanz des Brennpunkts vom Scheitel und dem durch dieſe Diſtanz dividirten Produkt aus der Differenz des halben Parameters und der gedachten Diſtanz in die

die dem Punkt der Peripherie korreſpondirende Abſciſſe gleich. Das iſt, wenn man mit dem Herrn Prof. **Euler** die Diſtanz $AF = a$, den halben Parameter $= b$ nennt,

Satz. *Fig.* 108. 109. 110.

$$FM = a + \frac{(b-a)}{a} AP.$$

Beweis.

Nr. I. Bey der Parabel.

Aus §. 898. iſt klar, daß $FM = AP + AF = a + AP$; da nun in der Parabel die Diſtanz $a = \frac{1}{2}b$ §. 896. wenn man den gegenwärtigen Ausdruck mit dem daſelbſt gegebenen vergleicht, ſo iſt $\frac{1}{2}b + \left(\frac{b - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b}\right)AP = \frac{1}{2}b + AP$ $= a + AP$. Da dann für die Parabel $\frac{b-a}{a} = 1$ wird.

Nr. II. Für die Ellipſe iſt nach §. 914. $FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$, wo a die Zwerchaxe, e die Diſtanz des Brennpunkts vom Mittelpunkt C, nämlich CF bedeutet; folglich iſt $\frac{1}{2}a - e = AC - CF = AF =$ der Diſtanz des Brennpunkts vom Scheitel $= a$ nach dem Euleriſchen Ausdruck; folglich $\frac{2ex}{a} = \frac{(b-a)}{a}.x$. oder $\frac{2e}{a} = \frac{b-a}{a}$, daß nun dieſe Gleichung richtig ſey, erhellt aus der Figur: denn es ſey $\frac{2FC}{AB} = \frac{b-AF}{AF} = \frac{FN-AF}{AF}$; aber

Nr. I. $\frac{2FC}{AB} = \frac{AB-2AF}{AB}$, und weil $FN^2 = 2FN.$ $\frac{AF - 2FN.AF^2}{AB}$ §. 901.

folg-

ſolglich $FN = 2AF - \frac{2AF^2}{AB}$

$= \frac{2AF.AB - 2AF^2}{AB}$

Nr. II. ſo iſt $\frac{FN - AF}{AF} = \frac{2AF.AB - 2AF^2 - AF.AB}{AB.AF}$

$= \frac{2AB - 2AF - AB}{AB}$

$= \frac{AB - 2AF.}{AB}$ Aber dieſer Ausdruck iſt Nr. I. $= \frac{2FC}{AB}$, daher $\frac{2e}{a} = \frac{b - a}{a}$.

III. Fall. Eben ſo wird der Beweis für die Hyperbel nur mit veränderten Zeichen vorgetragen, weil in der Hyperbel $FM = e - \frac{1}{2}a + \frac{2ex}{a}$.

§. 944. Anmerk. Dieſer Beweis kömmt uns in der Aſtronomie zu ſtatten, wo man die Linien aus der Sonne an die Laufbahnen der Planeten und Kometen allgemein ausdrückt, wie ſolches Herr Prof. Euler in ſeiner nova Theoria Planetarum & Cometarum angeführt, und den Beweis p. 10. gedachter Schrift ſupponirt hat. Wir haben daher dieſen allgemeinen Ausdruck für alle koniſche Sektionen um ſo weniger unerwieſen übergehen können, weil der Beweis ſich faßlich und kurz vortragen läßt.

§. 945. Erklär. Die Abſciſſen und Ordinaten können in einer koniſchen Sektion nach Belieben und unter einem beliebigen Winkel angenommen, folglich aus ihren Gleichungen noch allgemeiner ausgedrücket werden; denn er ſey *Fig.* 111. AP = x, PM = y, und der Ordinatenwinkel APM = π; ſo iſt die allgemeinſte auf Nulle reduzirte Gleichung von dieſer zweyten Ordnung, welches die erſte der krummen Linien iſt,

iſt, und wenn die griechiſche Buchſtaben beſtändige Gröſſen bedeuten, $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$.

§. 946. **Zuſatz.** Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = o$, und $\zeta = 1$, $\beta = -a$, ſo iſt $o = -ax + y^2$, oder $ax = y^2$ die Gleichung für die Apolloniſche Parabel.

§. 947. **Lehrſatz.** Aus der obigen Gleichung §. 945. entſteht für y durch Subſtitutionen folgende Gleichung $y = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + (\phi x - \varrho)} : 2\zeta$; und aus dieſer läßt ſich beurtheilen, ob eine gegebene Gleichung zu einer Parabel oder Ellipſe oder Hyperbel gehöre.

Beweis.

Nr. I. Aus der Gleichung §. 945. ergiebt ſich leicht, wenn man nach §. 327. ordnet

$$\zeta y^2 + \gamma y + \varepsilon xy = -\alpha - \beta x - \delta x^2$$

das iſt $\zeta y^2 + (\gamma + \varepsilon x)y =$ $\qquad : \zeta$

$$y^2 + \frac{(\gamma + \varepsilon x)y}{\zeta} = \frac{-\alpha - \beta x - \delta x^2}{\zeta}$$ Eine nur quadrirte Gleich. add.

$$\frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{2\zeta} = \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{2\zeta}$$ folgl. §. 321.

$$y + \frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} = \sqrt{\frac{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 - \beta x - \alpha)}{2\zeta}}$$ wenn man nämlich die Wurzel extrah. und auf der andern Seite alles unter einerley Benennung bringt.

y =

$$y = -\frac{(\varepsilon x + \gamma)}{2\zeta} + \frac{\sqrt{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 - \beta x - \alpha)}}{2\zeta}$$ oder die Größe hinter dem Wurzelzeichen wirkl. mult.

$$+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon xx + 2\varepsilon x\gamma + \gamma\gamma - 4\zeta\delta x^2 - 4\zeta\beta x - 4\zeta\alpha)}$$ und dieß Produkt geordnet

$$+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + 2\varepsilon\gamma x + \gamma\gamma)}$$ nach §. 327.

$$-4\zeta\beta x - 4\zeta\alpha;$$ man nenne die letzten Koeffizienten u. Faktoren φ, ϱ, ſo iſt

$$y = -(\varepsilon x + \gamma) + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)\,x^2 + \varphi x + \varrho)}$$

mit dem gemeinſchäftlichen Diviſor 2ζ; welches das erſte zu beweiſen war.

Nr. II. Man nenne die Gröſſen hinter dem Wurzelzeichen z, und ſetze $x = \infty$, ſo werden für x^2 alle niedrigere Potenzen verſchwinden, und alſo $z = (\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2$; denn x^2 iſt in dieſem Fall unendlichmal gröſſer als x, und noch weit mehr als φ, ϱ, u. ſ. w. welche nicht unendlich angenommen werden.

Wenn nun $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta > 0$, oder poſitiv iſt, ſo giebt es, wie §. 920. für poſitive und negative unendliche Abſciſſen, die durch x ausgedruckt werden, Ordinaten; folglich hat die krumme Linie vier unendliche Schenkel, und iſt eine Hyperbel. Wenn aber $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta < 0$, oder negativ iſt, ſo giebt es keine Ordinaten für unendliche affirmative oder negative Abſciſſen, alſo iſt die krumme Linie eine Ellipſe nach §. 902. Wenn endlich $\varepsilon\varepsilon = 4\zeta\delta$, ſo ſieht man ſchon, weil ſonſt nichts übrig bleibt, daß die krumme Linie eine Parabel iſt, die zween unendliche Schenkel hat.

§. 948. Anmerk. Dieſe Betrachtung hat Herr Prof. Käſtner mathem. Anfangsgr. III. Th. p. 235. angeſtellt; und es wird dem Leſer nicht unangenehm ſeyn, daß wir die ihm beliebte Kürze etwas ausführlicher gemacht, und ihn dadurch in den Stand geſetzt haben, die Schlüſſe ſogleich zu überſchauen.

§. 949. **Lehrſatz.** Aus dem gegebenen Ordinatenwinkel und der Lage der Koordinaten gegeneinander läßt ſich ihre Gleichung allgemein finden. Es ſey *Fig.* 111. die Lage der Koordinaten CQ, QM, folglich auch C gegeben; man ſetze

BQ = t, QM = u; den Winkel APM = π, TCQ = γ
BQM = x, folglich CTQ = $180^\circ - C - Q$

$$= 180^\circ - \gamma - x.$$

$$PMT = \mu = 180^\circ - MPT - MTP.$$

Es iſt aber $MPT = 180^\circ - \pi$

$$\mu = 180^\circ - 180^\circ + \pi - MTP.$$

$$MTP = \gamma + x$$

folglich $\mu = \pi - \gamma - x.$

$$\text{ſin.}\,T : PM = \text{ſin.}\,\mu : PT,\ \text{alſo}\ PT = \frac{PM\,.\,\text{ſin.}\,\mu}{\text{ſin.}\,T}$$

$$\text{ſin.}\,T : CQ = \text{ſin.}\,x : CT = \frac{CQ\,.\,\text{ſin.}\,x}{\text{ſin.}\,T}$$

$$\text{ſin.}\,T : PM = \text{ſin.}\,\pi : MT = \frac{PM\,.\,\text{ſin.}\,\pi}{\text{ſin.}\,T}$$

$$\text{ſin.}\,x : CT = \text{ſin.}\,\gamma : TQ = \frac{CT\,.\,\text{ſin.}\,\gamma}{\text{ſin.}\,x}$$

Wenn man nun die gefundenen Werthe ſubſtituirt, ſo laſſen ſich Gleichungen zwiſchen den neuen Abſciſſen u, t finden; wie man leicht auch in Rückſicht auf andere krumme Linien begreift.

§. 950. **Anmerk.** Dieß iſt das wichtigſte von den koniſchen Sektionen, das wir vorzutragen geſonnen waren; mehreres gehört nicht hieher, unerachtet man ganze Folianten davon geſchrieben hat. Dieß eine wiederholen wir noch, daß man den Parameter in allen drey Sektionen aus den Figuren finden kann, wenn man die aus dem Brennpunkt gezogene rechtwinklichte Ordinate duplirt.

Von

Von einigen andern, beſonders auch transſcendentiſchen Linien.

§. 951. **Anmerk.** Man wird ohne unſer Erinnern begreiſſen, daß es auſſer den koniſchen Sektionen noch eine Menge von krummen Linien gebe, wovon einige mehr, die andere weniger brauchbar ſind. Hieher gehören die verſchiedenen Quadrat-izes, die Ciſſois, die Konchois oder Muſchellinien, die Spirallinien, die Radlinie oder griechiſch Cycloïs und Trochoïs, die Logiſtik u. ſ. w. Unter dieſen verdienen die beyden letzteren, nämlich die Logiſtik und die Cycloïs vornämlich unſere Aufmerkſamkeit; jene wegen den Logarithmen, dieſe wegen ihrem Nutzen in der Mechanik.

§. 952. **Erklär.** Wenn man *Fig.* 119. eine gerade Linie in ſo viel gleiche Theile theilet, als man will, und aus den Theilungspunkten A, O, P, N die Linien AB, OR, PM, NQ dergeſtalt ziehet, daß ſie zu einander eine kontinuirliche geometriſche Proportion haben, ſo heißt die krumme Linie BRMQ die **Logiſtik** oder die **logarithmiſche Linie.**

§. 953. **Zuſatz.** Wenn AP, AN die Abſciſſen ſind, ſo ſind AB, PM die Ordinaten, folglich ſind die Abſciſſen die Logarithmen der Ordinaten; iſt alſo eine Ordinate $=$ y, die andere $=$ z, ſo ſind die korreſpondirende Abſciſſen ly, lz nach §. 299.

§. 954. **Zuſatz.** AT oder die Abſciſſenlinie iſt alſo zugleich die Aſymptote der Logiſtik, weil PM niemals 0 wird, auſſer wenn AT unendlich groß iſt, indem alsdann AB : PM $=$ 1 : 0.

§. 955. **Erklär.** Die **Radlinie** (Cyclois; Roulette) *Fig.* 112. entſteht, wenn ſich ein Rad um ſeine Axe dergeſtalt herum bewegt, daß es ſich im Bewegen fortwälzt, und durch dieſe Fortwälzung die krumme Linie FPQ beſchreibt.

§. 956. **Zuſatz.** Demnach iſt der Bogen FLB der geraden Linie BQ gleich; und weil PL = y, FL = x geſetzt wird, ſo iſt x = y, die Gleichung für die Radlinie.

§. 957. **Erklär.** Linien von höhern Ordnungen, z. E. von der dritten, vierten, fünften Ordnung u. ſ. w. ſind ſolche algebraiſche Linien, in welchen die höchſte Potenz von x oder y, oder von beyden zugleich mehr als zwo Dimenſionen haben, oder wenn Produkte von x, y vorhanden ſind, die mehr als zwo Dimenſionen ausmachen.

§. 958. Anmerk. So iſt die Ciſſois des Diokles; wo $ay = x^3 + xy^2$ eine Linie der dritten Ordnung. Sie läßt ſich auch aus *Fig.* 61. beſtimmen.

§. 959. **Erklär.** Transcendentiſche Linien ſind ſolche Linien, in welchen ſich keine beſtimmte algebraiſche Gleichung geben läßt. Wenn z. E. zu einer Abſciſſe unendlich viel Ordinaten, oder umgekehrt zu einer Ordinate unendlich viel Abſciſſen, das iſt, mehr, als man angeben kann, gehören, ſo iſt, weil die Abſciſſen und Ordinaten x und y heiſſen, x eine tranſcendentiſche Funktion von y, und y eine transcendentiſche Funktion von x; zwiſchen welchen keine beſtimmte Gleichung ſtatt findet, indem ſie unendlich viele Dimenſionen haben müßte, welches algebraiſch unmöglich iſt.

§. 960. **Zuſatz.** Eine transſcendentiſche Linie iſt alſo eine Linie von einer höhern Ordnung, als irgend eine möglich iſt; und eine gerade Linie würde ſie in unendlich vielen Punkten ſchneiden; welches auch umgekehrt folget.

§. 961. Anmerk. Die Archimedeiſche Schnecken-oder Spirallinie, die niemalen aufhört, und ins Unendliche im Schnecken fortbeſchrieben werden kann, iſt alſo eine transſcendentiſche Linie, denn eine gerade Linie würde ſie in unendlich vielen Punkten ſchneiden.

§. 962.

§. 962. Zuſatz. Weil eine einzige Sehne unendlich vielen Bögen korreſpondirt, *Fig.* 54. z. E. die Sehne AB dem Bogen ADB, ferner auf der andern Seite dem Bogen AB, wieder ADB + ADBA; und AB + ABDA u. ſ. w. ins Unendliche die Peripherie vervielfältigt, ſo giebt es zwiſchen den Sehnen und dem Bogen keine algebraiſche Gleichung, und der Bogen iſt eine transſcendentiſche Funktion von der Sehne.

§. 963. Zuſatz. Eben ſo iſt der Bogen eine transſcendentiſche Funktion, vom Sinus, Koſinus, der Tangente, Kotangente, Sekante, Koſekante, u. ſ. w. nach §. 697. 706.

§. 964. Zuſatz. Weil jedem Sinus und jeder Sehne unendlich viele Ausſchnitte (Sectores) und unendlich viele Abſchnitte (Segmenta circuli) zugehören, ſo giebt es auch zwiſchen dem Sektor und der Sehne oder Sinus, und zwiſchen dem Segment und der Sehne oder Sinus keine algebraiſche Gleichung.

§. 965. Lehrſatz. Die unbeſtimmte Quadratur des Zirkels iſt ſchlechterdings unmöglich.

Beweis.

Zur unbeſtimmten Quadratur des Zirkels hat man eine Gleichung 1) zwiſchen der Sehne, oder Sinus, oder Koſ. oder Tang. oder Kotang. oder Sekante, oder Koſekante, oder Querſinus und dem Bog.n nöthig; 2) zwiſchen dieſen Linien und dem Sektor; 3) zwiſchen dieſen Linien und dem Segment; kein viertes giebt es nicht. Aber in allen drey Fällen iſt keine algebraiſche Gleichung möglich; weil die zu den gemeldten Linien gehörigen Bögen, Sektoren und Segmente transſcendentiſche Funktionen von ihnen ſind. Folglich iſt die unbeſtimmte Quadratur des Zirkels ſchlechterdings unmöglich.

§. 966. Anmerk. Daraus aber folgt noch nicht, daß zwiſchen einem gewiſſen beſtimmten Bogen. z. E. dem Bogen von 60° oder 45° u. ſ. w. und ſeinem Sinus oder Tangenten keine Vergleichung ſich finden laſſe; wiewohl man bisher noch keine gefunden hat, und vielleicht vergeblich ſucht. Weitere Erläuterung findet man in Herrn Prof. Eulers Analyſ. Infin. L. II. §. 540.

§. 967. Anmerk. Weil die Radlinie die unbeſtimmte Rektifikation des Zirkels vorausſetzt, ſo iſt auch dieſe transſcendentiſch; und eine gerade Linie, wie *Fig.* 113. würde ſie in unendlich vielen Punkten ſchneiden.

Die geometriſchen Oerter und die Konſtruktion der Gleichungen.

§. 968. Erklär. Eine Linie, durch welche eine unbeſtimmte Aufgabe aufgelöſet wird, heißt ein geometriſcher Ort (Locus); diejenigen geometriſchen Oerter, welche durch eine gerade Linie, und unter den krummen durch den Zirkel aufgelöſet werden, heiſſen loca plana; was durch die Linien der zweyten Ordnung, den Zirkel ausgenommen, ſich auflöſen läßt, heißt man loca ſolida; weitere Kenntniß hatten die Alten nicht, und die Linien höherer Ordnung hieſſen ſie loca linearia.

§. 969. Anmerk. Dieſe Materie gehört alſo nur in ſofern hieher, daß man die Bemühungen der Alten hiſtoriſch verſtehen lerne, und die Namen auch wiſſe, die man vor Zeiten dieſen Linien gegeben. Denn heut zu Tag ſind ſie, wie die Konſtruktionen der Gleichungen, weder in der Ausübung, wie ſchon Wolf Elem. Lat. T. I. §. 608. Analyſ. fin. anmerkt, noch auch in der Theorie von einigem Nutzen; ich habe auch davon in meinen erſten Gründen aller mathem. Wiſſenſch. §. 524 — 527. und 200. folgg. gehandelt.

§. 970. Erklär. Wenn man *Fig.* 120. die zwo krummen Linien AMB und DMN mit einander vergleichen will, ſo ſucht man den Ort M, wo ihre Abſciſſen eine gemeinſchäftliche Ordinate haben, welche PM iſt, und dieſe

heißt

heißt die Gleichung der Wurzel; man kann auch eben ſo die gemeinſchäftliche Abſciſſe ſuchen. Eine ſolche Verzeichnung nun heißt die Konſtruktion der Gleichung, durch welche man die Linien findet, welche die Wurzeln der Gleichung vorſtellen.

§. 971. Anmerk. Man hat ſie vor Zeiten zu Gleichungen, die mehr als zwo Dimenſionen haben, beſonders gebraucht. Baker gab ſich insbeſondere Mühe, eine Regel davon feſtzuſetzen, in welcher er die Verbindung des Zirkels und der Parabel angerathen hat. Newton hat dagegen gründliche Erinnerungen gemacht, und die Zirkel und Ellipſe vorgeſchlagen, weil es nicht darauf ankömmt, ob die Gleichung einer krummen Linie einfacher ſey oder nicht, ſondern ob ſie ſich leicht zeichnen laſſe; denn man will die Wurzeln durch Zeichnen finden; nun läßt ſich die Ellipſis viel leichter als die Parabel beſchreiben; dahero dieſe Verbindung vorzuziehen iſt. Sonſt müßte man auch die Parabel dem Zirkel vorziehen, weil die Gleichung der Parabel einfacher als des Zirkels iſt; jedermann aber würde es für ungereimt halten, wenn man bey einer Konſtruktion der Gleichung die Parabel dem Zirkel vorzöge. Die ganze Arbeit aber iſt heut zu Tag entbehrlich, weil man durch Rechnung die Wurzeln viel genauer finden kann, als durch dieſe Zeichnung; die Alten, denen das Delphiſche Problem und die Triſectio anguli ſo nahe lag, wurden durch Noth dazu gedrungen, weil ſie die Kunſtgriffe, mit welchen wir heut zu Tag unſere Rechnungen vollführen, nicht hatten. Sie haben ſich auch darinn geirret, daß ſie die beyden Aufgaben durch den Zirkel und geraden Linien auflöſen wollten; indem die Triſectio anguli auf eine kubiſche Gleichung führt, welche ſchon durch zwo krumme Linien konſtruirt werden muß. Karteſius hat die Konſtruktion der kubiſchen und biquadratiſchen Gleichung zuerſt gelehrt, daher es kein Wunder war, daß die Alten in der Auflöſung gedachter Probl. nicht wohl zurecht kamen. Von dem Delphiſchen Problem haben wir ſchon §. 632. in der Elementargeom. gehandelt, was aber die Triſektion des Winkels betrift, ſo wird man ſich noch aus §. 770. Trigon. erinnern, daß man den vielfachen Winkel finden kann; denn weil das Vielfache entſteht, wenn man das Einfache immer zu ſich ſelbſt addirt, ſo darf man nur, wenn der Sinus $= a$, Koſinus $= b$, in dem Ausdruck §. 742. immer ſetzen $d = a$, $\delta = b$; und für das doppelte $m = a$, $\mu = b$; ſo iſt des doppelten Winkels Sinus $= 2ab$, und ſein Koſinus $b^2 - a^2$; wenn man jetzo nur $m = 2ab$ und $\mu = b^2 - a^2$ ſetzet, ſo iſt des dreyfachen Winkels Sinus nach

eben dieſem §. $= a(b^2 - a^2) + b \cdot 2ab = 3ab^2 - a^3$. Hieraus ſuche man den Sinus des dritten Theils, weil der ganze Winkel dreymal ſo groß als ſein Drittheil iſt. Denn es ſey $x = 3ab^2 - a^3$ der Sinus des ganzen Winkels; folgl. $a^3 - 3ab^2 + x = 0$; man ſetze $b^2 = 1 - a^2$ nach §. 701.; ſo iſt $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}x = 0$; eine kubiſche Gleichung. Iſt der gegebene Winkel ein rechter, ſo iſt $x = 1$, folgl. $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} = 0$, und $a = \frac{1}{2}$; welches auch aus der Trigon. §. 768 erhellt; weil $\frac{1}{2} = \text{ſin. } 30°$, nach §. cit. aber $30° = \frac{1}{3} \cdot 90$.

§. 972. Anmerk. Man könnte auch hier noch was von der Kardaniſchen Regel ſagen, die kubiſchen beſtimmten Gleichungen aufzulöſen; da nämlich die Wurzeln aus $x^3 - ax + b = 0$ dem allgemeinen Ausdruck für alle kubiſche Gleichungen, wo das zweyte Glied weggeſchaft worden §. 347. zu geben gelehret wird. Kardan hat ſie 1570 in ſeiner arte magna de regulis Algebraicis bekannt gemacht. Da ſie aber nach dem Zeugniß der größten Mathematikverſtändigen von ſehr wenigem Gebrauch iſt, und nur wegen den ſeltſamen Bemühungen, die ſich in vorigen Zeiten die Algebraiſten damit gegeben, angemerkt zu werden verdient; ſo können wir ſie übergehen. Herr Prof. Käſtner hat ſie ausführlich erklärt math. Anfgr. T. III. §. 699-724. aber nur blos wegen den ſeltſamen Bemühungen der Algebraiſten über dieſe Regel; welchen Umſtand er zur Entſchuldigung anführt. Denn ſonſt haben wir weit bequemere Methoden, ſowohl die rationalen als irrationalen Wurzeln zu finden. Zum Ueberfluß will ich doch eine Auflöſnng der kubiſchen beſtimmten Gleichungen durch die ſogenannte Kardauiſche Regel geben, um ſo mehr als ich etlichemal über Hr. Käſtners Auflöſung §. 699. IV. Th. Anfgr. von einigen lehrbegierigen Freunden aus der Ferne gefragt wurde, daher ich hier für alle auf einmal die Erläuterung geben kann. Der allgemeine Ausdruck für jede kubiſche Gleichung iſt, nach Wegſchaffung des zweyten Gliedes, $x^3 = ax + b$. Nun ſetze man $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; ferner ſollen A und B die beyden Wurzeln folgender quadratiſchen Gleichung $Z^2 = \alpha Z - \beta$ ſeyn; welches alles möglich iſt, wie ein jeder leicht ſieht. Es wird alſo nach dem Hariotiſchen Lehrſatz $A + B = \alpha$, und $A \cdot B = \beta$; denn die Gleichung $Z^2 = \alpha Z - \beta$ hat zwey Wurzeln A und B, deren Summe $A + B$ der Koeffizient vom zweyten Glied z, dahero eben dieſer Koeffizient $\alpha = A + B$, und deren Produkt $A \cdot B$ das dritte Glied iſt, dahero das dritte Glied $\beta = A \cdot B$ ſeyn muß, nach dem ſchon angeführten Lehrſatz.

Nun erhebe man $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ zur dritten Potenz, ſo iſt nach den ordentlichen Regeln des binomiſchen Lehrſatzes.

$x^3 = A + 3\sqrt[3]{AA.B} + 3\sqrt[3]{A.B.B} + B$; u. ſchicklicher ausgedrückt,
$x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{A.B.}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})$; aber
$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = x$, folglich

$x^3 = 3x\sqrt[3]{A.B} + A + B.$ Aber es iſt zuerſt geſetzt
$x^3 = ax + b.$ folglich

$ax + b = 3x\sqrt[3]{A.B} + A + B$: dahero nach den korreſpond. Gliedern
$a = 3\sqrt[3]{A.B}$ und $b = A + B$. Wir fanden aber oben, aus der Hariotiſchen Regel, daß $A + B = \alpha$, und $A.B = \beta$, folglich iſt $\alpha = 3\sqrt[3]{\beta}$ und $b = \alpha$; alſo die quadratiſche obige Gleichung $Z^2 = \alpha Z - \beta$ wird ſich in folgende verwandeln

$$Z^2 = bZ - \frac{a^3}{27}$$

(denn was das letzte Glied betrift, ſo wird, weil $a = 3\sqrt[3]{\beta}$ nach geſchehener Diviſion $\frac{a}{3} = \sqrt[3]{\beta}$ und Kubirung $\frac{a^3}{27} = \beta$). Nun laſſen ſich die Wurzeln geben, denn es iſt $Z = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3)}$; den unter dem Wurzelzeichen befindlichen irrationalen Ausdruck ſetze man $= c$, ſo iſt $A = \frac{1}{2}b + c$, $B = \frac{1}{2}b - c$. und folglich nach dem zuerſt geſetzten Ausdruck $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + c)} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b - c)}$. Das iſt genug zur Erläuterung der Regel und Auflöſung; die weitere Rechnung in den Käſtneriſchen Anfangsgründen §. 700. folgg. iſt leicht, und kann nun ſelbſt ohne weitere Beyhülſe nachgeleſen und kalkulirt werden.

Allgemeine Gründe der Differentialrechnungen.

§. 973. **Erklär.** Wenn eine Gröſſe nach und nach kleiner wird als eine jede angebliche Gröſſe (quavis data minor), ſo nimmt ſie unendlich ab, oder **verſchwindet**, (quantitas evaneſcens); eine ſolche verſchwindende Gröſſe heißt das Differenziale, und das Verhältniß, in welchem ſie verſchwindet, das Verhältniß der Differentialen.

§. 974. **Lehrſatz.** Wenn $a^{n-1}Z = z^n$, ſo iſt das Verhältniß der Differenzialen davon, die wir E und e nennen wollen $= \frac{E}{e} = \frac{nZ^{n-1}}{a^{n-1}}$.

Beweis.

Es werde aus Z nach §. 235. Z + E, und aus z werde z + e, ſo iſt

$a^{n-1}(Z+E) = (z+e)^n$; das iſt nach §. 220.

$$a^{n-1}Z + a^{n-1}E = z^n + nz^{n-1}e + \frac{n.n-1}{1.2}.z^{n-2}e^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^{n-3}e^3.$$

Da nun $a^{n-1}Z = z^n$

——————— ſubtr.

ſo iſt $a^{n-1}E = nz^{n-1}e + \frac{n.n-1}{1.2}z^{n-2}e^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^{n-3}e^3$.

——————————— : e

$$\frac{a^{n-1}E}{e} = nz^{n-1} + \frac{n.n-1.z^{n-2}e}{1.2} + \frac{n.n-1.n-2z^{n-3}e^2}{1.2.3}$$

$$\frac{a^{n-1}E}{e} = nz^{n-1}$$

——————— : a^{n-1}

$$\frac{E}{e} = \frac{nz^{n-1}}{a^{n-1}}$$

Wenn nun e unendlich klein, ſo ſind alle in e multiplizirte Glieder gegen nz^{n-1} unendlich klein, und verſchwinden, oder vielmehr wird ſich der Werth der Reihe ohne Ende der Gränze nz^{n-1} nähern, folgl. wird in geom. Schärfe wie §. 199. auch hier ſeyn das obige Verhältniß.

§. 975. **Zuſatz.** Wenn $a = 1$, ſo iſt $a^{n-1} = 1$; und $\frac{E}{e} = nz^{n-1}$, und $E = nz^{n-1}e$; aber E iſt das Differentiale von z^n, folglich iſt $nz^{n-1}e$ das Differentiale von z^n.

§. 976. **Zuſatz.** Nennet man nach der deutſchen Mathematikverſtändigen willkührlicher Benennung $e = dz$, ſo iſt alſo Diff. $z^n = nz^{n-1}dz$.

§. 977. **Zuſatz.** Das Diff. von x^2 iſt alſo $2xdx$, das von $x^3 = 3x^2dx$, das von $x^r = rx^{r-1}dx$.

§. 978. **Anmerk.** Die Engländer legen die Methode der Fluxionen zu Grunde; es ſey *Fig.* 1. $AB = x$, $BC = y$, und νx bedeute die Geſchwindigkeit, mit welcher der Punkt B die Linie AB beſchreibt, νy die Geſchwindigkeit, mit welcher der Punkt C die Linie BC beſchreibt; nach Verflieſſung einer willkührlichen Zeit, die endlich ſeyn mag, werde aus dem Rechteck AC das ähnliche Rechteck AE; man ſuche alſo die Geſchwindigkeit, mit welcher das ganze Rechteck ſich verändert hat. Das Rechteck heißt $AB \cdot BC = xy$. Nun fragt man, wie geſchwinde $BC = y$ fortrücken müſſe, daß die Gleichheit immer erhalten, und das wachſende Rechteck in allen Zeittheilen ſich gleich und dem vorigen ähnlich bleibe; ſo wird man antworten, mit der Geſchwindigkeit des Punkts $B = \nu x$; eben ſo wird ſich die Linie $AB = x$ mit der Geſchwindigkeit des Punkts $C = \nu y$ bewegen; demnach iſt die Geſchwindigkeit, mit welcher ſich das ganze Rechteck verändert $= \nu(xy) = y \cdot \nu x + x \cdot \nu y$. Denn wenn ſich dieſe beyden Linien mit einer andern Geſchwindigkeit bewegten, ſo würde die eine früher oder ſpäter als die andere an den Ort kommen, wohin man ſie haben will; wenn ſich aber x mit der Geſchwindigkeit von y, und y mit der Geſchwindigkeit von x bewegt, ſo bleibt das Rechteck ſich immer gleich, und ſeinem vorigen Zuſtande ähnlich; alſo iſt die Geſchwindigkeit, mit der ſich das ganze Rechteck verändert $x\nu y + y\nu x$; ohne daß man nöthig hätte, etwas entweder als unendlich klein anzuſehen, oder gar für ein abſolutes Nichts wegzuwerfen. Sind die Linien $AB \cdot BC$ gleich, ſo iſt $x = y$, und die Geſchwindigkeit beyderſeits νx, alſo, weil $xy = y^2$, die Geſchwindigkeit des veränderten Quadrats $x\nu x + x\nu x = 2x\nu x$; wäre es ein Kubus, ſo iſt die Geſchwindigkeit ſeiner Veränderung, weil die ganzen Flächen $= x^2$ ſich verändern, $= 3x^2\nu x$; denn aus x^2 wird $2x\nu x, = 2x^{2-1}\nu x$, aus x^3 wird $3x^2\nu x = 3x^{3-1}\nu x$; und aus x^n wird $nx^{n-1}\nu x$.

§. 979. **Anmerk.** Die Deutſchen nennen die Räume, welche mit den Geſchwindigkeiten würden beſchrieben werden, wie auch die Geſchwindigkeit ſelbſt, die Differenzialgröſſen; folglich iſt

iſt die Fluxionenrechnung von der Differentialrechnung unterſchieden, unerachtet ſie auf einerley Rechnung hinausführt.

§. 980. Anmerk. Will man, wie die gewöhnlichſte Art in Deutſchland ſich auszudrücken iſt, nach den Wolfiſchen Elementen die Differentialen mit Sandſtäublein, die man bey Meſſung eines Berges ohne Gefahr zu irren, weglaſſen darf, oder nach der Lehre anderer mit abſoluten Nullen, die gar keine Gröſſen haben, vergleichen, ſo wird abermal einerley Rechnung im Erfolg herauskommen, unerachtet alle dieſe Gründe der Rechnung von einander verſchieden ſind. Wir überlaſſen die Wahl der Gründe den Leſern, indem uns genüget, nach der alten Euklideiſchen Art das Verhältniß auf Ausdrücke, die kleiner als jede angebliche Gröſſe ſind, gebracht zu haben, wie ſolche auch Newton ſelbſt, als rationes primas & ultimas betrachtet hat. Wenigſtens ſcheinet uns der angeführte Grund §. 200. am meiſten überzeugend zu ſeyn. Eine weitere Ausführung, beſonders auch in Rückſicht auf die Fluxionenmethode, findet man in den Käſtneriſchen Anfangsgr. T. IV. S. 1—28. doch iſt von dem Weſentlichen nichts von uns übergangen worden.

Die Anwendung der Differentialrechnung auf die vier Rechnungsarten, in poſitiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen, auch Wurzeln, Potenzen und zuſammengeſetzten Gröſſen.

§. 981. Willkührl. Satz. Die Differentialgröſſen werden durch den Buchſtaben d angezeigt; das Differentiale von x iſt dx, das von z, dz, das von y iſt dy. Die Engländer bedienen ſich ſtatt des d eines Punkts: z. E. $\dot{x}$, $\dot{y}$, u. ſ. w. Wir werden uns immer des erſten Ausdrucks bedienen.

§. 982. Lehrſatz. Die Addition und die Subtraktion, das iſt, die Summe und die Differenz der veränderlichen Gröſſen, wird mit einerley Zeichen durch bloſſe Verbindung mit dem d ausgedrückt; aber wenn unveränderliche Gröſſen dabey ſind, ſo iſt das Differential eben das, welches es wäre, wenn keine unveränderliche Gröſſe dabey wäre.

Be-

Beweis:

Erſter Fall.	Zweyter Fall.
Es ſey $Z = u + x - y$; ſo iſt	$Z = u + a$
$Z + dZ = u + du + x + dx - y - dy$	$Z + dZ = u + du + a$
folgl. $dZ = du + dx - dy$	$dZ = du.$

§. 983. **Zuſatz.** Man kann alſo ſagen, das Differential einer unveränderlichen Gröſſe ſey $= 0$; oder beſſer, es hat keines; denn was unveränderlich iſt, kann weder gröſſer, noch kleiner, alſo auch nicht unendlich klein werden.

§. 984. **Zuſatz.** Wenn zwo veränderliche Gröſſen zuſammen einer unveränderlichen gleich ſind, ſo muß die eine abnehmen, wenn die andere wächſt, oder umgekehrt; denn wenn ſie beyde wachſen oder abnehmen, ſo kann ihre Summe in allen Umſtänden nicht unveränderlich ſeyn. Folglich werden die Differentiale in dieſem Fall entgegengeſetzt, das eine poſitiv, das andere negativ: denn es ſey $x + y = a$; ſo iſt $dx + dy = 0$, und $dx = - dy$; oder $dy = - dx$.

§. 985. **Lehrſatz.** Das Differential des Produkts xy iſt die Summe aus den Produkten jeden Faktors in das Differential des andern.

Satz.

$$\text{Diff.}\ (xy) = xdy + ydx.$$

Beweis.

Es ſey $xy = Z$, ſo iſt $4Z = 4xy$. Aber $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$ weil, wenn man wirklich quadrirt, herauskömmt nach §. 145.

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 \\ - \quad + \quad - \\ \hline + 4xy. \end{array}$$

folgl. ſubtr.

4Z

$4Z = (x+y)^2 - (x-y)^2$. Es ſey

I. $x + y = u$	I. $x - y = v$., ſo iſt
$dx + dy = du$	$dx - dy = dv$.
II. $(x+y)^2 = u^2$	II. $(x-y)^2 = v^2$
folgl. $d(x+y)^2 = 2udu$ §. 977.	$d(x-y)^2 = 2vdv$ §. 977.
aber $2udu = 2(x+y).(dx+dy)$	$2vdv = 2(x-y).(dx-dy)$,

wenn man nämlich die Werthe von u und v ſubſtituirt.

folgl. $4dZ = 2(x+y).(dx+dy) - 2(x-y).(dx-dy)$
$= 2udu - 2vdv$.
$: 2$

$2dZ = (x+y).(dx+dy) - (x-y).(dx-dy)$;
und wenn man wirkl. multiplizirt und ſubtrahirt.

$$= xdx + ydx + xdy + ydy$$
$$= xdx - ydx - xdy + ydy$$
$$- \quad + \quad + \quad -$$

$$2dZ = 2ydx + 2xdy$$
$: 2$
$$dZ = ydx + xdy.$$

§. 986. Zuſatz. Eben ſo iſt d $(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$; da allemal das Produkt je zweyer Faktoren in das Differenitale des dritten multiplizirt, und die Summe addirt wird. Hieraus läßt ſich das Diff. $(xyvz)$ auf eine ähnliche Weiſe finden, wenn man nur je drey Faktoren in das Diff. des vierten multiplizirt.

§. 987. Anmerk. Den obigen Lehrſatz §. 985. und Beweis findet man in den Käſtneriſchen Anfangsgründen; in den Wolfiſchen Elementen ſteht der bekannte, daß $(x + dx).(y + dy)$ giebt $xy + xdy + ydx + dxdv$; alſo die Differenz, wenn xy weggenommen wird $= xdy + ydx + dxdy$; aber dxdy kann als eine gegen ydx wie nichts zu rechnende Stöſſe weggeworfen werden; folglich iſt das Diff. $xy = xdy + ydx$, aber nur beynahe wahr; weil

weil dxdy doch noch etwas iſt. Iſt aber nach anderer Meynung dxdy, wie ich ſelbſt vor zehen Jahren in meiner Lettre ſur quelques paradoxes du Calcul geſetzet habe, ein abſolutes Nichts, ſo müßten auch xdy und ydx nichts werden, denn eine poſitive Gröſſe mit Nulle multiplizirt, giebt allemal Nulle. Man mag inzwiſchen die Sachen betrachten, wie man will, ſo ſind die Folgen der Rechnung gewiß und richtig.

§. 988. **Lehrſatz.** Das Differenziale des Quotienten iſt das Produkt des Diviſors in das Differentiale des Dividendus, weniger dem Produkt des Dividendus in das Differentiale des Diviſors, zuſammen dividirt durch das Quadrat des Diviſors. Man ſoll z. E. $\frac{x}{y}$ differenziren, ſo iſt

Satz:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy.}{y^2}$$

Beweis.

Es ſey $\frac{x}{y} = v$, ſo iſt

$$x = vy;\ \text{alſo}$$

$$dx = vdy + ydv.;\ \text{und}$$

$$dx - vdy = ydv.$$

$$\frac{dx - vdy}{y} = dv. \quad : y$$

Und den Werth von v ſubſtit.

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y \cdot y} = dv;$$ unter einerley Benennung

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = dv. = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

§. 989. **Lehrſatz.** Das Differentiale von einer Wurzelgröſſe, wo die Exponenten negativ oder poſitiv, ganze oder gebrochene Zahlen ſeyn können, läßt ſich beſtimmen.

I. Satz.

$\sqrt[n]{u^m}$, das iſt

$u^{\frac{m}{n}}$ läßt ſich differenziren.

Beweis.

Man ſetze

$u^{\frac{m}{n}} = w$, ſo iſt

$u^m = w^n$; und

$mu^{m-1}du = nw^{n-1}dw$.

Da aber $w = u^{\frac{m}{n}}$;

——————— ſubſt.

ſo iſt $mu^{m-1}du = nu^{\frac{m\cdot(n-1)}{n}}\ dw$.

——————— : $nu^{\frac{m.(n-1)}{n}}$

$= nu^{\frac{mn-m}{n}}$; ſo iſt

$$\frac{mu^{m-1}du}{nu^{\frac{mn-m}{n}}} = dw$$

——————— Und wirkl. divid.

$$\frac{m}{n}u^{\frac{mn-n-mn+m}{n}}du = dw$$

——————— Reduzirt

$$\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}du = dw = d\left(u^{\frac{m}{u}}\right).$$

II. Satz.

v^{-r} läßt ſich differenziren

Beweis.

$v^{-r} = \frac{1}{v^r}$ §. 180.

Nun ſey $\frac{1}{v^r} = y$;

——————— ſo iſt

$1 = yv^r$

——————— differenz.

$0 = y\,rv^{r-1}dv + v^r dy$.

Alſo $-ryv^{r-1}dv = v^r dy$

——————— : v^r

$$\frac{-ryv^{r-1}dv}{v^r} = dy.$$

——————— Reduzirt nach §. 175.

$-ryv^{-1}dv = dy$. Aber

$y = \frac{1}{v^r} = v^{-r}$; alſo

$-ryv^{-1}dv = d(v^{-r})$.

§. 990. **Zuſatz.** Aus dem erſten Satz erhellet, daß man Potenzen von gebrochenen Exponenten, und aus dem andern

dern, daß man Potenzen von negativen Exponenten differenziren könne; folglich iſt die Differentiationsregel auf alle auch Irrationalgröſſen, die man als Brüche betrachten kann, anzuwenden.

§. 991. **Zuſatz.** Aus dem Verfahren §. 989. ſieht man, daß bey Potenzen von ganzen, gebrochenen und negativen Exponenten, folglich auch bey allen Wurzelgrößen die Differenziation geſchieht, wenn man den Exponenten um eins vermindert, und hernach mit dem Produkt aus dem unveränderten Exponenten in das Differentiale der veränderlichen Größe alles multiplizirt. So iſt $\sqrt[2]{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ differenzirt $= \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} dx$; und $d(\sqrt[3]{x^2}) = d(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3} x^{\frac{2-3}{3}} dx$.

§. 992. **Lehrſatz.** Potenzen und Wurzeln von zuſammengeſetzten veränderlichen und unveränderlichen Größen laſſen ſich differenziren.

Satz.

$\sqrt{(aa - xx)}$ läßt ſich leicht differenziren.

Beweis.

Es ſey $\sqrt{(aa - xx)} = y$, ſo iſt

$$aa - xx = y^2$$

diff.

$$-2xdx = 2ydy$$

oder : 2

$$-xdx = ydy.$$

: y

$$-\frac{xdx}{y} = dy;$$

aber es iſt $y = \sqrt{aa - xx}$ geſetzt,

folgl. $$\frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}} = d(\sqrt{aa - xx}).$$

§. 993. **Anmerk.** Eben ſo differenzirt man $\sqrt{ax - xx}$, und das Differenziale iſt $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - xx)}}$; wie leicht erhellet, wenn man den obigen Ausdruck $= y$ ſetzt, und wie vorher kalkulirt; überhaupt werden durch die Subſtitutionen viele Vortheile im

Differenziren und Integriren gefunden, wie im folgenden vorkömmt; dieſer letzte Lehrſatz, der doch nöthig war, iſt in den meiſten Kompendien bey der Lehre von Differenziren bisher übergangen worden.

Allgemeiner Beweis des Newtoniſchen Binomiums und des Harriotiſchen Lehrſatzes.

§. 994. Anmerk. Bey dem Newtoniſchen Binomium kömmt es nur darauf an, daß man die Koeffizienten beſtimme; denn daß die Potenzen von a ab, und die von b in eben der Ordnung zunehmen müſſen, iſt ſchon §. 217. unumſtößlich erwieſen. Der Beweis wird alſo nur auf die Koeffizienten gehen, wie wir jetzo vortragen.

§. 995. **Lehrſatz.** In dem Newtoniſchen Binomium ſind die Koeffizienten, wenn der Exponent n iſt, 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n.n-1}{1.2}$, $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ u. ſ. w.

Beweis.

Man nenne die Koeffizienten A, B, C u. ſ. w., ſo iſt nach §. 217.

Nr. I. $(a+x)^n = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 + Ca^{n-3}x^3 \ldots\ldots$

Die Reihe heiſſe $= S$, ſo iſt

$(a+x)^n = S$. Dieſer Ausdruck differenzirt giebt

$n(a+x)^{n-1}dx = dS$ nach §. 976.

$(a+x)^n = S$; man dividire damit, ſo iſt

——————— nach §. 175.

$$\frac{ndx}{a+x} = \frac{dS}{S}$$

——————— $. a+x$

$$ndx = (a+x)\frac{dS}{S}$$

——————— $. S$

$$nSdx = (a+x).dS$$

——————— $: dx$

nS

$$nS = (a+x)\frac{dS}{dx}\,,\quad \text{und}$$

$$0 = (a+x)\frac{dS}{dx} - nS.$$ Dieſen Werth muß man in der Reihe Nr. I. ſubſtit. denn es iſt

$$S = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 - - - \quad \text{und}$$

$$dS = 0 + Aa^{n-1}dx + 2Ba^{n-2}xdx + 3Ca^{n-3}x^2dx \ldots\ldots$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 + Aa^{n-1} + 2Ba^{n-2}x + 3Ca^{n-3}x^2 \ldots\ldots$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.\; a+x$$

$$(a+x)\frac{dS}{dx} = 0 + Aa^n + 2Ba^{n-1}x + 3Ca^{n-2}x^2 + 4Da^{n-3}x^3$$

$$Aa^{n-1}x + 2Ba^{n-2}x^2 + 3Ca^{n-3}x^3$$

$$-nS = -na^n - nAa^{n-1}x - nBa^{n-2}x^2 - - - -$$

$$(a+x)\frac{dS}{dx} - nS = 0 + (Aa - na)^n + \left.\begin{matrix} 2Ba^{n-1} \\ + Aa^{n-1} \\ - nAa^{n-1} \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 3Ca^{n-2} \\ + 2Ba^{n-2} \\ - nBa^{n-2} \end{matrix}\right\} x^2$$

Da nun dieß alles $= 0$, aber x nicht Nulle iſt; ſo iſt ein jeder von den Koeffizienten $= 0$, folglich

I. $Aa^n - na^n = 0.$

$$Aa^n = na^n$$

$$\overline{\qquad\qquad} : a^n$$

$$A = n.$$

II. $2Ba_n^{-1} + Aa^{n-1} - nAa^{n-1} = 0$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} : a^{n-1}$$

$$2B + A - nA = 0; \quad \text{und}$$

$$2B = nA - A = (n-1)A.; \quad \text{aber}$$

Nr. I. $A = n.$

$$2B = n\,.\,n - 1.$$

$$\overline{\qquad\qquad} : 2$$

$$B = \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}$$

$$\text{III.}\quad \frac{3Ca^{n-2} + 2Ba^{n-2} - nBa^{n-2} = 0}{} \;:a^{n-2}$$

$$3C + 2B - nB = 0$$

$$3C = nB - 2B = (n-2)B; \quad \text{aber} \quad B = \frac{n.n-1}{1.2}$$

$$\frac{3C = \frac{n.n-1.n-2}{1.2}}{} \;:3$$

$$C = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \quad \text{u. ſ. w.}$$

§. 996. Anmerk. Dieſen Beweis habe ich in meiner Lettre ſur quelques paradoxes du Calcul a. 1753, und hernach in meinen erſten Gründen aller mathematiſchen Wiſſenſch. 1759. gegeben. Herr Prof. Käſtner gab einen völlig ähnlichen 1758. in einem Progr. unter dem Titel: Theorema binomiale univerſaliter demonſtratum heraus. Warum ein ſo allgemeiner Beweis nöthig ſey, haben wir §. 215. ſchon gemeldet; denn man ſieht daraus, daß man das binomial-Theorema auch bey gebrochenen und negativen Exponenten ſicher gebrauchen darf.

§. 997. Anmerk. Was den Harriotiſchen Lehrſatz betrift, ſo kömmt es nur auf die Frage an, warum die Wurzeln, wenn ſie alle möglich ſind, bejaht ſeyn, woferne die Zeichen abwechſeln, und verneint, woferne ſie ohne Abwechslung folgen; denn das übrige vom Harriotiſchen Lehrſatz iſt §. 332. richtig erwieſen.

§. 998. **Lehrſatz.** So viel in einer quadratiſchen Gleichung Abwechslungen der Zeichen ſind, ſo viel hat ſie affirmative Wurzeln; und ſo viel Folgen der Zeichen ſind, ſo viel hat ſie negative Wurzeln.

Beweis.

Es giebt bey quadratiſchen Gleichungen nicht mehr als folgende vier Formen, nach den Kombinationsregeln; weil x^2 allemal das Zeichen + hat. §. 209.

Qua-

Quadrate.

I. $x^2 + px + q$. hat zwo Folgen;	II. $x^2 - px + q$. zwo Abwechslungen;
III. $x^2 + px - q$. eine Folge u. eine Abwechsl.	IV. $x^2 - px - q$. eine Folge u. eine Abwechsl.

Wurzeln.

I. $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ zwo negative Wurzeln.	II. $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. affirmative Wurzeln.
III. $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$ eine poſitive u. negative.	IV. $+\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. eine poſitive u. negative.

§. 999. Anmerk. Weil die kubiſche Gleichung differenzirt eine quadratiſche wird, aber von einer quadratiſchen der Lehrſatz erwieſen iſt, ſo gilt er auch von der kubiſchen; und weil die biquadratiſche differenzirt die kubiſche wird, ſo gilt der Schluß auch von der biquadratiſchen, und ſo fort von allen hohen Gleichungen.

§. 1000. Anmerk. Eine allgemeine kubiſche Gleichung läßt ſich ausdrücken $x^3 \mp qx + r = y$; und das Differenziale iſt $3x^2dx + qdx = dy$, folgl. $3x^2 \mp q = \frac{dy}{dx}$, eine quadratiſche Gleichung, welche Nulle geſetzt, giebt $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}q}$ oder $= \pm\sqrt{\frac{1}{3}q}$. Iſt q bejaht, ſo hat die Gleichung im erſten Fall zwo unmögliche oder eingebildete Wurzeln, im andern aber zwo mögliche; vom letzten Fall iſt die Rede. Wenn man aus der Kombinationslehre den leicht zu erweiſenden Lehrſatz noch dazu nimmt, daß eine Reihe von Zeichen + und —, die mit + anfängt, Abwechslungen in gerader Zahl habe, wenn ſie ſich mit +, und in ungerader Zahl, wenn ſie ſich mit — endiget, und bedenkt, daß die Schlüſſe nur gelten, wenn die Wurzeln alle möglich ſind; ſo wird man einen ausführlichen Beweis von dieſem Lehrſatz geben können, wie ihn Herr Prof. Käſtner gegeben; uns genüget, die erſten Gründe davon geſagt zu haben. Herr von Segner hat einen Beweis davon gegeben, er läßt ſich aber nicht mit ſo wenig Worten vortragen, wie der Käſtneriſche, davon wir nur einen kurzen Begriff Auszugsweiſe geben wollten.

Allgemeine Betrachtung der höhern Differenzialien.

1001. **Erklär.** Wenn man eine Reihe Größen in einer Ordnung fortſchreibt, und ihre Differenzen ſucht, und von den Differenzen wieder Differenzen, u. ſ. f. ſo heißt man die erſte Reihe die Hauptreihe, die folgenden heiſſen die Differenzreihen, deren Koeffizienten ſich finden laſſen.

Hauptreihe	I. Differenzreihe	II. Differenzreihe
K		
L	L — K	
M	M — L	M — 2L + K
N	N — M	N — 2M + L
O	O — N	O — 2N + M
P	P — O	P — 2O + N

III. Differenzreihe	IV. Differenzreihe
N — 3M + 3L — K	
O — 3N + 3M — L	O—4N+6M—4L+K
P — 3O + 3N — M	P—4O+6N—4M+L

§. 1002. **Zuſatz.** Auſſer dem, daß die Koeffizienten der Differenzreihen, mit den Binomialkoeffizienten einerley ſind, erhellet aus der Tabelle folgendes:

I. Entſtehen die höhern Differenzreihen durch die Subtraktion der korreſpondirenden niedern Reihe von dem unmittelbar vorhergehenden Gliede; z. E. der II. Differenzreihe erſtes Glied iſt M — 2L + K = M — L — (L — K) der Differenz der vorhergehenden Reihe; N — 2M + L = N — M — (M — L.

II. Durch die Addition zweyer erſten Glieder zwoer nächſten Reihen, wird das zweyte Glied der erſtern Reihe gefunden u. ſ. w. z. E. K + (L — K) = L; und (L—K) + (M — 2L + K) = M — L.

III.

III. Die Summe aller erſten Glieder mit den Binomialkoeffizienten drückt das gegebene Glied der Hauptreihe aus. Z. E. Das vierte Glied der Hauptreihe N wird durch die Summe der vier erſten Glieder der Reihen, mit den Binomialkoeffizienten multiplizirt, ausgedrückt; $N = K + 3(L - K) + 3(M - 2L + K) + (N - 3M + 3L - K)$. Eben ſo fällt es bey O, P, in die Augen.

§. 1003. **Willk. Satz.** I. Die Glieder der Hauptreihe K, L, M, N, u. ſ. w. heiſſe man y, y1, y2, y3, y4, u. ſ. w. bis yn. da die Zahlen die Stellen der Glieder bedeuten; II. die erſte Differenzreihe heiſſe $\Delta 1$, und ihre Glieder $L - K$, $M - L$, u. ſ. w. $1\Delta 1$, $2\Delta 1$, $3\Delta 1$, $4\Delta 1$ u. ſ. w. III. Die zweyte Differenzreihe heiſſe $\Delta 2$ und ihre Glieder $1\Delta 2$, $2\Delta 2$, $3\Delta 2$, $4\Delta 2$ u. ſ. w.

§. 1004. **Lehrſatz.** Ein jedes Glied der Differenzreihen läßt ſich durch eine allgemeine Reihe aus den Gliedern der Hauptreihe ausdrücken.

Satz.

$$1\Delta n = yn - n \,.\, yn - 1 + \frac{n \,.\, n - 1}{1 \,.\, 2} . yn - 2.$$

Beweis.

$1\Delta 1 = y1 - y.$

Aber $2\Delta 1 = y2 - y1.$ nach §. 1002. Nr. I.

folgl. ſubtr. $2\Delta 1 - 1\Delta 1 = y2 - 2y1 + y$;

aber $2\Delta 1 - 1\Delta 1 = 1\Delta 2$ nach §. zit. Nr. I.

$1\Delta 2 = y2 - 2y1 + y.$

$2\Delta 2 = y3 - 2y2 + y1.$

folg. ſubtr. $2\Delta 2 - 1\Delta 2 = y3 - 3y2 + 3y1 - y$;

aber $2\Delta 2 - 1\Delta 2 = 1\Delta 3$ nach §. zit.

folglich $1\Delta 3 = y3 - 3y2 + 3y1 - y.$

 Ferner

Ferner $2\Delta 3 = y4 - 3y3 + 3y2 - y1$.;

alſo $2\Delta 3 - 1\Delta 3 = 1\Delta 4 = y4 - 4y3 + 6y2 - 4y1 + y$.

Daher alles allgemein

$$1\Delta n = yn - nyn - 1 + \frac{n : n - 1}{1 \,.\, 2} yn - 2 \ldots\ldots$$

§. 1005. Zuſatz. Weil $1\Delta n = yn - nyn \cdot 1 + \frac{n . n - 1 .}{1 . 2} yn - . 2$

und $2\Delta n = yn + 1 - nyn + \frac{n . n - 1}{1 \,.\, 2} yn - 1 \ldots$

ſo iſt auch $2\Delta n - 1\Delta n = 1\Delta n + 1 = yn + 1(n+1)yn + (n+1)nyn - 1$.

§. 1006. Lehrſatz. Ein jedes Glied der Hauptreihe läßt ſich durch eine Reihe aus den Gliedern der Differenzreihen beſtimmen.

Satz.

$$yn = y + A1\Delta 1 + B1\Delta 2 + C1\Delta 3 \ldots + R1\Delta r$$

Beweis.

Nr. I. $y1 = y + 1\Delta 1$

$y2 = y1 + 2\Delta 1$;

aber $2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$ §. 1002 Nr. II.

$y2 = y1 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2$

$y1 = y + 1\Delta 1$

$y2 = y + 2 . 1\Delta 1 + 1\Delta 2$.

Nr. II. $y3 = y2 + 3\Delta 1$

$3\Delta 1 = 1\Delta 1 + 2\Delta 2$

$2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$ ſubſt.

$y3 = y2 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2 + 2\Delta 2$

$2\Delta 2 = 1\Delta 2 + 1\Delta 3$

$y3 = y2 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2 + 1\Delta 2 + 1\Delta 3 = y2 + 1\Delta 1 + 2 . 1\Delta 2 + 1\Delta 3$;

aber

aber Nr. I. $y2 = y + 2 . 1\Delta 1 + 1\Delta 2$

---

folgl. $y3 = y + 3 . 1\Delta 1 + 3 . 1\Delta 2 + 1\Delta 3.$;
folglich allgemein, wenn man für die Binomialkoeffizienten **A**, **B**, **C**, **D** u. ſ. w. ſetzet

$$yn = y + A . 1\Delta 1 + B . 1\Delta 2 + C 1\Delta 3 \ldots\ldots + R 1\Delta r + S 1\Delta r + 1 \ldots\ldots$$

§. 1007. **Zuſatz.** Alſo iſt auch $yn + 1 = y2 + A2\Delta 1 + B2\Delta 2 \ldots\ldots + R2\Delta r$, weil die Lage von $yn+1$ gegen die zweyte Glieder der Reihe einerley iſt mit der Lage yn gegen die erſte Reihe der Glieder.

§. 1008. **Anmerk.** Die Allgemeinheit dieſer Formeln hat Herr Prof. Käſtner ausführlich bewieſen; man findet ſie zwar nicht in den Wolfiſchen Elementen; inzwiſchen ſind ſie wegen den neuern Schriften unentbehrlich; wie wir im folgenden zeigen werden. Uebrigens enthalten die zween Lehrſätze den allgemeinen Beweis der Lehre von den Differenzreihen, die §. 235. folg. vorgetragen wurde.

§. 1009. **Willk. Satz.** Man drückt die höheren Differenziale, das iſt, das zweyte, dritte, vierte, nte Differenzial von y aus durch d^2y, d^3y, d^4y, d^ny, und heißt ſie auch differentio-Differenzialen.

§. 1010. **Zuſatz.** Man kann alſo für $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$, Δn §. 1003. auch ſchreiben, dy, d^2y, d^3y, d^ny; als worinn ſich die Unterſcheide verwandeln, wenn die Abnahme ins Unendliche geht.

§. 1011. **Lehrſatz.** Die differentio-Differentiation geſchieht, wie die Differentiation der endlichen variablen Gröſſen.

Beweis.

Bey der Addition und Subtraktion, oder Summe und Diferenz iſt es vorhin richtig; aber auch bey der Multiplikation

 und

und Diviſion findet man einerley Geſetz. Denn es ſey xdx noch einmal zu differenziren; man ſetze

$$xdx = z \text{ ſo iſt } dx = \frac{z}{x} \text{ und } d^2x = \frac{xdz - zdx}{x^2} \quad \text{§. 988.}$$

$$\text{folgl. } x^2d^2x = xdz - zdx,$$
$$\text{und } x^2d^2x + zdx = xdz;$$

aber $z = xdx$ nach der Vorausſetzung; dieß ſubſtituirt

$$\frac{x^2d^2x + xdxdx = xdz}{\quad} : x$$

$xd^2x + dxdx = dz.$ Das iſt

$xd^2x + dx^2 =$ diff. xdx. Durch dieſe Reduktion ſieht man alſo, daß man, wie bey endlichen Gröſſen, jeden Faktor in das Differenziale des andern multipliziren muß.

§. 1012. **Zuſatz.** Das Differenziale von dx^2 iſt alſo nach einer ähnlichen Reduktion $2dxd^2x$; u. ſ. w.

§. 1013. **Zuſatz.** Aus gleichem Grunde iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2}$.

§. 1014. **Zuſatz.** Um den höhern Differenzialen einen beſondern Werth zu geben, ſetzt man ein erſtes Differenziale, oder eine Gröſſe unveränderlich. Wenn $dy = pdx$, ſo iſt $ddy = dpdx + pd^2x$, iſt nun dx unveränderlich, ſo iſt $ddy = dpdx$.

Die Beſtimmung der Werthe durch höhere Differenzialien, und die Verwandlung der Gleichungen durch eben dieſe Mittel.

§. 1015. **Lehrſatz.** Wenn in dem Newtoniſchen Binomium m unendlich wird, ſo läßt ſich der Werth beſtimmen, dem ſich die Reihe nähert.

Be-

Beweis.

Es ſey c eine beſtändige endliche Größe, e eine die unendlich abnehme, ſo iſt $m = \frac{c}{e} = \infty$, iſt nun das Glied des Binomiums $\frac{m.(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \ldots n} = P$; ſo iſt, den Werth von m ſubſtituirt,

$$\left(\frac{c}{e}.\left(\frac{c}{e}-1\right)\ldots\left(\frac{c}{e}-n+1\right)\right) : 1.2\ldots n.$$ Dieß unterei-nerley Benen.

$$= \frac{c(c-e)\ldots(c-(n-1)e)}{e^n} : 1 \,.\, 2 \ldots n = P$$

$$= \frac{c(c-e)\ldots(c-(n-1)e;)}{1 \,.\, 2 \ldots n \,.\, e^n} = P,$$ woraus folgt, weil e unendlich abnimmt.

$$\frac{c^n}{1.2\ldots n.e^n} = \frac{m^n}{1.2\ldots n.}, \text{ weil } \frac{c^n}{e^n} = m^n.$$

§. 1016. **Lehrſatz.** Der Werth von einer Gleichung, z. E. $x^3 + x^2 + x$, läßt ſich finden, wenn ſich z. E. x in $x + e$, oder $x + 2$ verwandelt.

Beweis.

Es verwandle ſich x in ym, wenn ſich x in $x + me$ verwandelt; m wachſe unendlich, und e nehme unendlich ab, c ſey eine beſtändige Größe, ſo iſt wie oben $m = \frac{c}{e}$, und $me = c$; und e verwandle ſich durch die unendliche Abnahme in dx.

Nun iſt nach §. 1006. $ym = y + A\Delta 1 + B\Delta 2 \ldots + N\Delta n.$

das iſt nach §. 1009. $ym = y + Ady + Bddy \ldots + Nd^n y.$

und wenn ſich e in dx verwandelt, ſo iſt der Nte Binomialkoeffizient für ym, wo $m = \frac{c}{e} = \frac{c}{dx} = \frac{c^n}{1.2.3 \ldots ndx^n}$ nach §. 1015; folglich die Reihe

$$ym = y + \frac{cdy}{dx} + \frac{c^2d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{c^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{c^4d^4y}{1.2.3.4\,dx^4} \ldots + \frac{c^nd^ny}{1.2\ldots ndx^n}.$$

§. 1017.

§. 1017. **Zuſatz.** Wenn ſich x in x — e verwandelt, ſo wechſeln die Zeichen + — ab; wie aus dem binomiſchen Lehrſatz erhellet.

§. 1018. **Zuſatz.** Gehen die Differenziale von y nicht ohne Ende fort, ſo wird die Reihe abgebrochen, und man kann ſie vollkommen berechnen.

§. 1019. Anmerk. In der Gleichung $x^3 + x^2 + x$ verwandle ſich x in $x + 2$, ſo iſt $c = 2.$; folglich

$$y = x^3 + x^2 + x$$

$$\frac{c\,dy}{dx} = 6x^2 + 4x + 2, \text{ weil } dy = 3x^2dx + 2xdx + dx$$

$$\frac{c^2d^2y}{1.2dx^2} = 12x + 4, \text{ weil } ddy = 6xdx^2 + 2dx^2]$$

$$\frac{c^3d^3y}{1.2.3.dx^3} = +8, \text{ weil } d^3y = 6dx^3;$$

$$ym = x^3 + 7x^2 + 17x + 14$$

dieſe Ausdrücke mit den Koeffizienten $\frac{c}{dx}$, $\frac{c^2}{2dx^2}$, $\frac{c^3}{6dx^3}$ multipliz. giebt die bezeichneten Werthe, wo $c = 2$, $c^2 = 4$, $c^3 = 8$.

Man findet alſo den Werth auf eben dieienige Weiſe, wie man ihn in den arithm. Wiſſenſchaften §. 344. gefunden hat.

Nik. Bernoulli Methode,

Alle mögliche Reihen, durch die ſich eine Gleichung auflöſen läßt, und die Geſtalt der Reihen zu finden.

§. 1020. **Lehrſatz.** Wenn einer auf Nulle reduzirten Gleichung Hauptglied $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma \dots$ geſetzt wird, und ſodann die korreſpondirenden Gleichungsglieder mit den Potenzen, Differenzialen u. ſ. w. korreſpondirende Reihen bekommen, ſo laſſen ſich die Koeffizienten auch aus den Exponenten beſtimmen.

Be

Beweis.

Es ſey $rrdy^2 - rr + yy = 0$; man differ. noch einmal, ſo iſt $2rrdyddy + 2ydy = 0$; und durch $2dy$ dividirt $rrddy + y = 0$. Wenn nun $r = 1.$, ſo iſt, wofern

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \; . \; . \; . \; .$$ geſetzt wird.

$$dy = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} \; . \; . \; . \; .$$

$$ddy = (\alpha-1)\alpha Ax^{\alpha-2} + (\beta-1)\beta Bx^{\beta-2} + (\gamma-1)\gamma Cx^{\gamma-2};$$

folglich $ddy + y = \left.\begin{matrix}\alpha-1\alpha Ax^{\alpha-2} \\ +Ax^{\alpha}\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}(\beta-1)\beta Bx^{\beta-2} \\ Bx^{\beta}\end{matrix}\right\}$

$$+ \left.\begin{matrix}(\gamma-1)\gamma Cx^{\gamma-2} \\ Cx^{\gamma}.\end{matrix}\right\} \; . \; . \; .$$

Nun ſey $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$, $\epsilon = 4 \ldots$; ſo iſt A, B unbeſtimmt, weil $\alpha = 0$, und $\beta - 1 = 0$;

aber $C = \frac{-A}{\gamma.(\gamma-1)}$; $D = \frac{-B}{\delta.(\delta-1)}$, wo Ax^{α} zum Glied $(\gamma-1)$ $\gamma Cx^{\gamma-2}$ gehört, weil $\alpha = \gamma - 2$.

Man ſetzt nämlich bey einer ſteigenden Reihe, wo x den kleinſten Exponenten hat, α erſtlich negativ, dann Nulle, ferner poſitiv; woraus man A, B, C, D u. ſ. w beſtimmt, wie §. 348. gelehrt worden.

§. 1021. **Zuſatz.** Wollte man in der erſten Reihe nicht wieder differenziren, ſondern unverändert laſſen $rrdy^2 - rr + yy = 0$, ſo iſt nach §. 348.

$$yy = AAx^{2\alpha} + 2ABx^{\alpha+\beta} + 2ACx^{\alpha+\gamma} + 2ADx^{\alpha+\delta}$$
$$BBx^{2\beta} + 2BCx^{\beta+\gamma}$$

$$rrdy^2 = \alpha^2A^2r^2x^{2\alpha-2} + 2\alpha\beta ABr^2x^{\alpha+\beta-2} - - -$$

$-rr = -rr$ Wenn man nämlich den Werth von dy §. 1020. mit ſich ſelbſt multiplizirt.

Hier-

Hieraus werden die Koeffizienten zu beſtimmen geſucht; wobey verſchiedenes in Rückſicht auf die Exponenten u. ſ. w. in Acht zu nehmen; davon Herr Prof. Käſtner §. 466. IV. Th. der Mathem. nachgeſehen werden kann; α wird nämlich zuerſt negativ, hernach o, und ſodann poſitiv geſetzt, da man ſieht, was herauskömmt, und ob bey dieſer oder jener Gleichung dieſe Vorausſetzungen angehen; übrigens iſt die gegebene Auflöſung §. 1020. allgemeiner als dieſe, wie Herr Prof. Käſtner auch anmerkt in der ſchon gemeldten Stelle.

§. 1022. Zuſatz. Wenn $xxddy - ny = 0$, ſo iſt wie oben

$$ddy = (\alpha-1)\alpha Ax^{\alpha-2} + (\beta-1)\beta Bx^{\beta-2} \ldots$$
$$x^2 = x^2$$

——————— multiplizirt nach §. 175.

$$x^2 ddy = (\alpha-1(\alpha Ax^{\alpha} + (\beta-1)\beta Bx^{\beta} \ldots$$

wo bey den Exponent.—2 hinwegfällt.

$$ny = nAx^{\alpha} + nBx^{\beta} \ldots$$

folgl. $xxddy - ny = (\alpha-1)\alpha) - n)Ax^{\alpha} + (\beta-1)\beta)$
$- nBx^{\beta} + (\gamma-1)\gamma) - n)Cx^{\gamma} \ldots$.

Man ſetze wie §. 1020. jeden Koeffizienten $= 0$, ſo iſt

$\alpha\alpha - \alpha - n)A = 0$; und

——————— : A

$\alpha\alpha - \alpha - n = 0$

——————— folglich

$\alpha\alpha - \alpha = n$; und nach §. 322.

$\alpha = (\frac{1}{2} \mp \sqrt{(\frac{1}{4} + n)}$; eben ſo iſt aus ähnlicher Rechnung

$\beta = \frac{1}{2} \mp \sqrt{(\frac{1}{4} + n)}$; für γ kömmt eben dieſe Gleichung heraus; welches alſo entweder α oder β ſeyn müßte; denn α und β ſind nicht gleich wegen der verſchiedenen Zeichen $\mp$, davon die obere für eine fallende, die untere für eine ſteigende

Reihe

Reihe gelten) es ſoll aber keines von beyden ſeyn; folglich iſt C u. ſ. w. Nulle; und der Werth von y beſteht in den beyden gefundenen Theilen.

§. 1023. Anmerk. Bey dieſer Methode iſt noch verſchiedenes zu merken, das bey jeden vorkommenden Fällen ein geübter Verſtand von ſelbſt finden wird. In dem Käſtneriſchen Werk findet man dergleichen Fälle und Exempel, wie wir ſchon angemerkt, und verweiſen unſere Leſer um ſo eher dahin, als wir hier nur das Weſentliche dieſer Regel, die einen groſſen Vorzug vor dem Newtoniſchen Parallelogramm hat, vorzutragen geſonnen waren.

Die Methode vom Kleinſten und Gröſten. (Methodus de maximis & minimis.)

§. 1024. Erklär.. Wenn eine Funktion einer Gröſſe, z. E. von x bis auf einen gewiſſen Grad oder Werth wächst, und von da an wieder abnimmt, indem x beſtändig zu- oder abnimmt, ſo heißt dieſer Werth ihr Gröſtes (Maximum).

§. 1025. Anmerk. So hat die Ellipſe und der Zirkel ein Maximum in den Ordinaten; denn die gröſte Ordinate des Zirkels iſt der Radius, und hernach nehmen ſie wieder ab, unerachtet die Abſciſſe x immer wächſt. Oder in Zahlen; wenn man ſagt, 8 ſoll ſo getheilt werden, daß die beyden Theile als Faktoren das gröſte Produkt geben, ſo ſind die Faktoren 4 . 4; denn 4 . 4 = 16 Maximum; ein jedes anders Produkt iſt kleiner; z. E. 2 . 6; 3 . 5 u. ſ. w. Eben ſo iſt für $x^2 - 10x + 60 = y$, dieſes y für x ein kleinſtes, wenn x = 5; es iſt alsdann 35. Jeder andere Werth von x, z. E. 4, oder 6 gröſſer, beydesmal nämlich = 36, Man kann ſie auch in poſitive und negative Maxima und Minima eintheilen, auch theils einförmige, theils vielförmige Funktionen dießfalls betrachten; die einförmigen kommen zuerſt vor.

§. 1026. Lehrſatz. Das Maximum oder Minimum wird gefunden, wenn man die Differenzialvergleichung davon = 0 ſetzt, und ferner durch kalkuliren den Werth von x oder y ſucht.

Be-

Beweis.

Weil ein Maximum oder Minimum, als ein ſolches, unveränderlich iſt, ſo iſt ſein Differential = o; wenn man alſo eine ſolche gegebene Größe differenziirt, das Differenziale = o ſetzt, ſo kann man den Werth des Maximi oder Minimi in leichtern Fällen finden. Man verlangt das Maximum im Zirkel; die Gleichung iſt $ax - x^2 = y^2$, dieſes iſt ein Maximum; folglich

$ax - x^2 =$ Maxim.

———————— diff.

$adx - 2xdx = o$; und

$adx = 2xdx$; folglich

———————— : dx

$a = 2x$, und

$\frac{1}{2}a = x$. Wo alſo die Abſciſſe dem halben Diameter gleich iſt, da iſt das Maximum der Ordinate des Zirkels; eben ſo wird das Exemp. §. 1025. berechnet.

§. 1027. Anmerk. So hat man dieſe Lehre anfänglich vorgetragen, und ſo ſteht ſie in den Wolfiſchen Elementen; allein in neuern Zeiten fand man beſſere und allgemeinere Methoden, die Umſtände genau zu beſtimmen, unter welchen eine Funktion von x ein Maximum oder Minimum wird; wir wollen ſie kürzlich anführen.

§. 1028. Anmerk. Wenn $\frac{dy}{dx} = (x-f)^m P$ geſetzt wird, wo P eine Funktion von x iſt, die $x-f$ nicht zum Faktor hat, ſo iſt f ein Größtes oder ein Kleinſtes, wenn der Exponent m ungerade iſt; iſt aber m gerade, ſo iſt die Funktion weder ein Größtes, noch ein Kleinſtes. Denn y ſey eine einförmige Funktion von x, und x verwandle ſich zuerſt in $x+\alpha$, hernach in $x-\alpha$; (α kann ſo klein ſeyn als man will) ſo giebt es die beyden Reihen, nach §. 1016. folg.

$$\text{I.}^{\circ}\ y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}$$

$$\text{II.}^{\circ}\ y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2y}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3}.$$

Iſt

Iſt nun y ein Größtes oder Kleinſtes, ſo muß es in beyden Fällen größer oder kleiner als jeder der gefundenen Werthe ſeyn.

Dieß aber kann nicht geſchehen, es ſey dann $\frac{dy}{dx} = 0$; ſetzt man dieſes, und $\frac{ddy}{dx^2}$ iſt endlich, ſo müſſen die nachgehends folgende Glieder zuſammen weniger als dieſes dritte Glied betragen, wenn y ein Größtes oder Kleinſtes ſeyn ſoll. Iſt aber auch $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, ſo läßt ſich noch nichts ſchlieſſen.

Es ſey alſo $\frac{ddy}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, ſo ſind, wenn ſtatt x geſetzt wird, deſſen Werth alsdann F heiſſe, die Reihen in folgende verwandelt.

$$\text{I. } F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r.$$
$$\text{II. } F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p - \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r;$$

wo das zweyte Glied $\frac{dy}{dx} = 0$, fehlt, und die Schlüſſe hier wie oben gemacht werden. Denn wenn $p = 0$, und q endlich, ſo iſt F weder ein Größtes, noch Kleinſtes; iſt aber $q = 0$, und endlich, ſo iſt F ein Größtes oder Kleinſtes. Auf dieſe Weiſe gehen die Schlüſſe immer fort, nach den ungeraden Gliedern von y, nämlich 1, 3, 5, 7, u. ſ. w. daraus folgt, daß wenn $\frac{dy}{dx} = (x-f)^2\, P$, und P eine Funktion von x iſt, die $x - f$ nicht zum Faktor hat, f ein Größtes oder Kleinſtes werde, wenn von $(x - f)^m P$ der Exponent m ungerade iſt; iſt er aber gerade, ſo iſt es weder ein Größtes, noch ein Kleinſtes. Beydes erhellet auch, wenn man $(x-f)^2 P$ differenzirt, und differenzio differenzirt, und hernach $x = f$ ſetzet, und ſieht, was herauskömmt; bey ungeraden Exponenten wird allemal ein Größtes oder Kleinſtes herauskommen.

§. 1029. Zuſatz. Das größte Dreyeck in einem halben Zirkel iſt das gleichſchenklichte; welches auf eine ähnliche Weiſe erhellet (*).

(*) Beweis. Es ſey (*Fig.* 35.) $AB = a$; $AE = x$; ſo iſt EB, weil bey D ein rechter Winkel iſt $= \sqrt{a^2 - x^2}$, und der Inhalt des Dreyecks $\frac{1}{2}AB \times EB = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$, oder

$\frac{1}{2}x$ hinter das Wurzelzeichen gebracht $= \sqrt{\frac{a^2x^2 - x^4}{4}}$; und dieſes iſt nach der Bedingung ein Größtes, und bleibt es, wenn man es gleich viermal nimmt, und zum Quadrat erhebt. Das Differenzial eines Größten iſt aber = 0, alſo

$$2a^2xdx - 4x^3dx = 0 \quad \text{und}$$

$$2a^2xdx = 4x^3dx \quad : dx$$

$$2a^2x = 4x^3 \quad : 4x$$

$$\frac{2a^2x}{4x} = \frac{4x^3}{4x} \quad \text{Wirklich dividirt.}$$

$$\frac{1}{2}a^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$$

Es muß alſo auch in der andern Seite $\sqrt{\frac{1}{2}}a$ ſeyn. Denn weil das Quadrat der Hypothenuſe $= a^2$ der Summe der Quadraten der zwo Seiten gleich ſeyn muß, ſo muß auch $EB = \sqrt{\frac{1}{2}}a$ ſeyn, weil dann $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$ iſt.

Von den Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien.

§. 1030. **Erklär.** Wenn *Fig.* 114. die krumme Linie AM von TM in M berührt wird, ſo heißt TM die Tangente, TP die Subtangente, QM die Normallinie, die auf TM perpendikular ſteht, und PQ die Subnormallinie.

§. 1031. **Lehrſatz.** Die Subtangente in allen krummen Linien iſt $\frac{ydx}{dy}$.

Beweis.

Man ziehe pm und PM unendlich nahe, und MR parallel mit Pp, ſo iſt $\triangle MmR \backsim TMP$, folglich

$mR : MR = PM : PT =$ Subtangente.

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{by}.$$

§. 1032.

§. 1032. Anmerk. Das Dreyeck MmR iſt das Leibniziſche ſogenannte Triangulum characteriſticum, oder das Barrowiſche Dreyeck, indem Barrow wie wir ſchon gemeldet haben, dieſe nämliche Proportion lang vor Newton und Leibnitz in ſeinen Lectionibus opticis bekannt gemacht, und was Leibnitz dy und dx nennt, e und a genannt hat, dahero nach Barrow die Tangente PT $= \frac{ay}{e}$, welches eben ſo viel als $\frac{ydx}{dy}$, wenn RM = Pp = dx, und Rm = dy geſetzt wird.

§. 1033. **Lehrſatz.** In der Parabel iſt die Subtangente der doppelten Abſciſſe gleich.

Satz. PT = 2x. *Fig.* 114.

Beweis.

$ax = y^2$ Def. der Parabel.

——— differenzirt

$adx = 2ydy$

——— : a

$dx = \frac{2ydy}{a}$

——— . y

$ydx = \frac{2y^2dy}{a}$

——— : dy

$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$

$y^2 = ax$ ſubſtit.

$\frac{2ax}{a} = 2x = \frac{2y^2}{a}$

$\frac{ydx}{dy} = 2x = PT.$

§. 1034. Zuſatz. Man muß nämlich bey der gegebenen Gleichung jedesmal durch Differenzirung ſo weit kalkuliren, bis man einen gleichgültigen Werth für $\frac{ydx}{dy}$ bekömmt, welcher der Ausdruck für alle Subtangenten iſt; man kann alſo auf dieſe Weiſe aller krummen Linien Subtangenten beſtimmen (*).

(*) Zur Uebung. In der Ellipſe iſt ſie $\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$

Beweis

In der Ellipſe iſt $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$

oder

$ay^2 = abx - bx^2$

differenz.

$2aydy = abdx - 2bxdx$

in Faktoren.

$2aydy = (ab - 2bx)\,dx$

divid. ab — 2bx.

$\frac{2aydy}{ab - 2bx} = dx.$

· y

$\frac{2ay^2dy}{ab - 2bx} = ydx$

: dy

$\frac{2ay^2}{ab - 2bx} = \frac{ydx}{dy}.$

Es iſt aber $\frac{ydx}{dy} = PT$; alſo auch $\frac{2ay^2}{ab-2bx} = PT.$

Da aber aus der zweyten Gleichung $ay^2 = abx - bx^2$; ſo iſt

. 2

$2ay^2 = 2abx - 2bx^2$

Alſo ſubſtituirt $\frac{2abx - 2bx^2}{ab - 2bx} = \frac{ydx}{dy}$

: b

2ax

$$\frac{2ax - 2x^2}{a - 2x} = \frac{ydx}{dy}$$
——————— : 2

$$\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{ydx}{dy} = PT.$$

Dieſe Gleichung giebt auch folgende Proportion:

$$(\tfrac{1}{2}a - x) : (a - x) = x : PT.$$

Auch im Kreiſe iſt die Subtangente $= \dfrac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$.

Denn im Kreiſe iſt $y^2 = ax - x^2$ ——— differenz.

$2ydy = adx - 2xdx$ ——— oder

$2ydy = (a - 2x)\, dx$ ——— und

$$\frac{2ydy}{a-2x} = dx$$
——— $\cdot \dfrac{y}{dy}$

$$\frac{2ydy}{a-2x} \cdot \frac{y}{dy} + \frac{ydx}{dy}$$
——— wirkl. multipl. u. aufgehoben.

$$\frac{2y^2}{a - 2x} = \frac{ydx}{dy}$$

Es iſt aber $y^2 = ax - x^2$ ——— alſo . 2

$2y^2 = 2ax - 2x^2$ ———; mithin

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$$
——— : 2

$$= \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}.$$

In der Hyperbel iſt ſie $= \dfrac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} = PT.$

Der Beweis iſt mit veränderten Zeichen, wie bey der Ellipſe.

Zuſatz. Aus dieſer Gleichung iſt

$(a + x)x = (\tfrac{1}{2}a + x)\, PT$ ——— u. daraus folgende Proportion d. i.

$$\tfrac{1}{2}a + x : x = (a + x) : PT.$$

 In

In der Hyperbel iſt die Subtangente die vierte Proportional zur Summe der halben Zwerchachſe und Abſciſſe, der Abſciſſe, und der Summe der Zwerchachſe und Abſciſſe.

§. 1035. **Zuſatz.** Folglich allgemein, wenn $a^{m-1}x = y^m$, iſt die Subtangente mx.

§. 1036. **Lehrſ.** Die Subnormallinie in allen krummen Linien iſt $\frac{ydy}{dx}$.

Satz. *Fig.* 114.

$$PQ = \frac{ydy}{dx}.$$

Beweis.

PT : PM = PM : PQ. weil TMQ = 90°, und bey P auch rechte Winkel.

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : y^2 : \frac{ydx}{dy} = y^2 \cdot \frac{dy}{ydx} = \frac{ydy}{dx}.$$

§. 1037. **Lehrſatz.** Die Subnormallinie der Parabel iſt eine beſtändige Linie, und dem halben Parameter gleich.

Satz. $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}a.$

Beweis.

$ax = y^2$ Def. der Parabel; differenzirt

$adx = 2ydy$: 2

$\frac{1}{2}adx = ydy$: dx

$$\frac{1}{2}a = \frac{ydy}{dx} = PQ.$$

§. 1038.

§. 1038. Zuſatz. Weil *Fig.* 108. in der Parabel $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$, ſo iſt $FH = FP + PH = x - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a = x + \frac{1}{4}a$;

alſo $FH = x + \frac{1}{4}a$; aber
$FM = x + \frac{1}{4}a$ §. 898.

Nr. I. $FH = FM$

Ferner $TP = 2x$ §. 1033.
$AP = x$ ſubtr.

$TP - AP = TA = x.$
$AF = \frac{1}{4}a$ add.

Nr. II. $TA + AF = TF = x + \frac{1}{4}a$;
folgl. nach Nr. I. $TF = FH = FM$;
daher der Winkel $FMH = FHM$ im gleichſchenkl. Δ;
ferner $PHM = HMQ$ §. 465.

$FMH = HMQ$
$THM = HMm$ ſind rechte;

$THM - FMH = HMm - HMQ$;

das iſt: $TMF = mMQ$.

§. 1039. Anmerk. In einem paraboliſchen Spiegel werden daher alle einfallende Strahlen, wie QM gegen den Brennpunkt F gebrochen, wie in der Optik erhellt; dahero die paraboliſchen Spiegel allen andern vorzuziehen ſind, und die gröſſeſte Wirkung thun (*).

(*) In der Ellipſe iſt ſie $\left(\frac{\frac{1}{2}a - x}{a}\right)b$.

Beweis. In der Ellipſe iſt

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a} \quad \cdot a$$

$$ay^2 = abx - bx^2 \quad \text{differenz.}$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx \quad : 2a$$

$$ydy = \frac{abdx - 2bxdx}{2a} \quad : dx$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{ab - 2bx}{2a} = (\tfrac{1}{2}a - x)\frac{b}{a} = PQ.$$

Und daher $a : b = \tfrac{1}{2}a - x : PQ$.

Im Kreiſe iſt ſie $= \tfrac{1}{2}a - x$.

Beweis. Im Kreiſe iſt $y^2 = ax - x^2$

und differenz.

$2ydy = adx - 2xdx$.

: 2

$$ydy = \left(\frac{a - 2x}{2}\right).\ dx$$

: dx

$$\frac{ydy}{dx} = \tfrac{1}{2}a - x.$$

In der Hyperbel iſt ſie $= \left(\frac{\tfrac{1}{2}a + x}{a}\right)b$, Kraft des Gegenſatzes; u. die Proportion:

$$a : b = (\tfrac{1}{2}a + x) : PQ.$$

§. 1040. **Lehrſatz.** Die Subtangente der logarithmiſchen Linie iſt eine beſtändige Linie.

Beweis. *Fig.* 119.

$MR : Rm = PM : PT$

$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy} = PT$; und wenn eine andere Abſciſſe y, ihre Ordinate z heißt, ſo iſt

$$\frac{zdy}{dz} = PT.$$

Da aber nach §. 952. $dy = dx$, und nach dieſem §.

$y : y + dy = z : z + dz$; auch nach §. 276.

$y : (y + dy) - y = z : (z + dz) - z$; ſo iſt

$y : dy = z : dz$, oder

$$\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz}$$

$dx = dy$; dadurch multipl.

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{zdy}{dz}.$$

§. 1041.

§. 1041. Anmerk. Die Anwendung dieſer Lehre von den Tangenten und Subtangenten u. ſ. w. iſt von ſehr ausgebreitetem Nutzen; man kann dahero ſich in Erfindung anderer Linien noch üben, auch die Methode umkehren, und aus den gegebenen Subtangenten die krummen Linien finden. Z. E. $\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{dy}$, man ſuche die krumme Linie; ſo iſt $aydx = 2y^2dy$, welches integrirt $ax = y^2$ giebt; wir werden davon in der Integralrechnung handeln.

Allgemeine Regeln der Integralrechnung auch in Rückſicht auf die Wiederherſtellung der beſtändigen Gröſſen.

§. 1042. **Erklär.** Das **Integrale** heißt die Gröſſe, durch deren Differenzirung das Differenziale entſtanden iſt; und **Integriren** heißt das Integrale aus der gegebenen Differenzialgröſſe finden.

1043. **Willk. Satz.** Integral und Integriren heißt man auch Summe und Summiren; und ſolche Integralſumme drückt man durch den Buchſtaben ſ aus, der vor das Differenzial geſetzt wird; z. E. $\int(ydx + xdy) = xy$.

§. 1044. **Zuſatz.** Aus den Differenziationsregeln nach den vier Rechnungsarten muß man noch wiſſen, daß

I. $\int(dx \mp dy) = x \mp y$

II. $\int(ydx + xdy) = xy$.

III. $\int\frac{(ydx - xdy)}{y^2} = \frac{x}{y}$ (*).

(*) Aus dieſen Formeln laſſen ſich folgende Regeln abziehen:

I. Unvermiſchte, bloß durch Zeichen zuſammengehängte Differenzialien integrirt man, wenn man die veränderlichen Gröſſen allein ſetzt.

II. Multiplizirte werden ſummirt, wenn man das Differenzialzeichen wegläßt, und alles durch die Anzahl der veränderlichen Größen dividirt; z. B. wie oben $\int(ydx + xdy) =$

$$(yx + xy) = \frac{2xy}{2} = xy$$

III. Das Differenzial eines Quotienten wird integrirt, wenn man die veränderliche Größe mit dem Zeichen Minus zum Zähler, und die Quadratwurzel des Nenners zum Nenner nimmt.

Eben ſo erinnert man ſich aus der Differenziation der Potenzen und Wurzeln, daß

I. $\int(nx^{n-1}dx) = x^n$

II. $\int(x^{m-1}dx) = \frac{1}{m}x^m$; oder $\int(xdx) = \frac{1}{2}x^2$.

III. $\int\left(\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}du\right) = \sqrt[n]{u^m}$; und

IV. $\int\left(\frac{-xdx}{\sqrt{aa-xx}}\right) = \sqrt{aa-xx}$ bey zuſammengeſetzten Differenzialien, davon wir ſogleich weiter reden werden.

§. 1045. **Zuſatz.** Weil bey den Potenzen und Wurzeln einerley Differenziationsregeln gegeben werden, ſo läßt ſich auch die Integrationsregel davon in Worten ausdrücken, welche man um ſo eher behalten muß, als dieſe Formeln am häufigſten vorkommen; die Regel iſt die folgende: **Man vermehrt den Exponenten der veränderlichen Größe um Eins, und dividirt hernach alles mit dem in das Differenziale der veränderlichen Größe (dx) multiplizirten neuen Exponenten.** Z. E. $\int(mx^{m-1}dx) = \frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$, und $\int(x^m dx) =$ $\frac{x^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$.

§. 1046.

§. 1046. **Zuſatz.** Weil die beſtändige Gröſſe im Differenziren wegfallen, oder wie man ſagt, Nulle werden, §. 983. ſo muß man bey dem Integriren eine ſolche Gröſſe wieder addiren oder ſubtrahiren; man drückt ſie aus $\pm$ *Conſtans* oder Conſt., oder nur C.

§. 1047. **Lehrſatz.** Die beſtändigen Gröſſen findet man, wenn man das Integral $= 0$ ſetzt, und hernach ſuchet, ob für die Konſt. noch was übrig bleibe, ob ſie poſitiv, negativ, oder Nulle werde. Z. E. Man hätte das Integrale $Z = \frac{m}{m+1}(x+a)^{\frac{1+m}{m}} +$ Konſt., und man wollte die Konſt. finden; ſo ſetzt man es $= 0$, folgl. iſt auch $\frac{m}{m+1}a^{\frac{1+m}{m}} + C = 0$; und daher $-\frac{m}{m+1}a^{\frac{1+m}{m}} =$ Conſt.; alſo iſt ſie negativ, und das ganze Integrale heißt $\frac{m}{m+1}(x+a)^{\frac{1+m}{m}} - \frac{m}{1+m}a^{\frac{1+m}{m}}$, welches man ſchicklicher ausdrücken kann; wie wir im folgenden zeigen, wo man die Erfindung der Konſtanten auch aus den Figuren erläutert.

Einige ſchwerere Integralformeln für zuſammengeſetzte Differenzialien.

§. 1048. **Erklär.** Zuſammengeſetzte Differenzialien ſind, wie Nr. IV. §. 1044., und die Integralregel iſt, wie bey den Potenzen; nur fehlt es mehrmalen, daß Ungeübte die Sache nicht ſo leicht überſehen können; leichtere Formeln ſind $\int c\,dx\,(a+x)^p = \frac{c(a+x)^{p+1}}{p+1}$ nach §. 1044. Nr. II.,

woraus

woraus auch verglichen mit Nr. IV. dieſe $\int\left(-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}\right)(a+\sqrt{(aa-xx)^2} = \frac{1}{3}(a+\sqrt{(aa-xx)^3}$ leicht zu überſehen ſeyn wird. Wir wollen einige ſchwerere geben.

§. 1049. **Satz.** $x^{rn}.x^{n-1}dx.(a+bx^n)^p$ läßt ſich integriren.

Beweis.

I. Es ſey $a+bx^n = z$
differenz. nach §. 977. $nbx^{n-1}dx = dz$:nb
$x^{n-1}dx = \frac{dz}{nb}$

Es ſey wie Nr. I.
II. $a+bx^n = z$; folglich
$bx^n = z-a$:b
$x^n = \frac{z-a}{b}$.

Dieſe Werthe ſubſtituirt geben das verwandelte Differenzial

$$\left(\frac{z-a}{b^{rn}}\right)^{rn}.\frac{z^p dz}{nb} = \frac{(z-a)^{rn}.z^n dz}{nb^{rn+1}} = (z^{rn} - rnz^{rn-1}a + \frac{rn.rn-1}{1.2.}z^{rn-2}a^2 - \frac{rn.rn-1.rn-2}{1.2.3.}z^{rn-3}a^3 . . \pm a^{rn}).\frac{z^p dz}{nb^{rn+1}}$$

$$= \frac{z^{rn+p}dz - rnz^{rn+p-1}adz + \frac{rn.rn-1}{1.2.}z^{rn+p-2}a^2 dz}{nb^{rn+1}}$$

Davon iſt das Integral des Zählers $= \frac{z^{rn+p+1}}{rn+p+1} - \frac{rnz^{rn+p}a}{rn+p} + \frac{rn.rn-1z^{rn+p-1}a^2}{1.2\ (rn+p-1)} \ldots\ldots + \frac{a^{rn}z^{p+1}}{p+1}$;
welches mit dem unveränderlichen Nenner nb^{rn+1} noch dividirt wird; da man nun überall für z ſeinen Werth $a+bx^n$ ſetzen kann, ſo läßt die obige Differenzialformel ſich wirklich integriren; wenn rn eine endliche ganze bejahte Zahl iſt, welches vorausgeſetzt wird.

§. 1050. **Anmerk.** Man ſolle $x^3 . x^{\frac{1}{2}-1} dx \left(a + bx^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ integriren; ſo iſt $n = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$; $m = 3$; und das Integrale $= \left(\frac{3z^{13:3}}{13} - \frac{9az^{10:3}}{10} + \frac{9a^2z^{7:3}}{7} - \frac{3a^3z^{4:3}}{4}\right) : -\frac{b^4}{2}$, denn dieſer Diviſor muß nb^{m+1} ſeyn; aber $m = 3$; und $n = -\frac{1}{2}$; folgl. $b^m = b^3$, und der andere Faktor $nb = -\frac{1}{2}b$, dieſe beyde multiplizirt geben $-\frac{1}{2}b . b^3 = -\frac{b^4}{2}$.

§. 1051. **Zuſatz.** So oft $x^m dx(a + bx^n)^p$ ſich in $x^{m+1-n} . x^{n-1}dx . (a+bx^n)^p$ verwandeln läßt, daß $m+1-n = m$, eine ganze poſitive Zahl wird, ſo kann man das Integrale finden.

§. 1052. **Lehrſatz.** Ein zuſammengeſeztes Differenzial, wo Irrationalgrößen vorhanden ſind, läßt ſich integriren.

Satz.

$\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx)}}$ ſoll integrirt werden.

Es ſey Nr. I. $\sqrt{(ax+xx)} = \frac{zx}{b}$, ſo iſt $z = \frac{b\sqrt{ax+xx}}{x}$;

und $ax + xx = \frac{zzxx}{bb}$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : x$$

$a + x = \frac{zzx}{bb}$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} . bb$$

$abb + xbb = zzx$; folglich

$abb = zzx - xbb = x(z^2 - b^2) \times$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : zz-bb$$

Nr. II. $\frac{abb}{zz-bb} = x$.

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} . \frac{z}{b}$$

$\frac{abb . z}{(zz-bb)b} = \frac{xz}{b}$; das iſt

Nr. III.

Nr. III. $\frac{abz}{zz-bb} = \frac{xz}{b} = \sqrt{(ax+xx)}$ Nr. I

Aber Nr. II. $x = \frac{abb}{zz-bb}$; folglich differenzirt

$$dx = \frac{abb \,.\, -2zdz}{(zz-bb)^2} \text{ nach §. 992.}$$

daher $aadx = \frac{aa \,.\, -2abbzdz}{(zz-bb)^2}$;

und $x\sqrt{(ax+xx)} = \frac{abb}{zz-bb} \,.\, \frac{abz}{zz-bb}$; folglich

$$\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = \frac{aa \,.\, -2abbzdz}{(zz-bb)^2} \,.\, \frac{zz-bb \,.\, zz-bb}{abb \,.\, abz} = -\frac{2adz}{b},$$

wenn man wirklich multiplizirt, und gegeneinander aufhebt; aber $\int(-\frac{2adz}{b}) = -\frac{az}{b}$, und den Werth von z ſubſtituirt $= -\frac{2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

1053. Saz. $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ läßt ſich integriren.

Es ſey $\sqrt{xx-aa} = z-x$, ſo iſt

Nr. I. $xx-aa = zz-2zx+xx$; alſo wenn xx ſubtr. wird

$-aa = zz-2zx$, und

$2zx = zz+aa$; folglich

Nr. II. $x = \frac{zz+aa}{2z}$; und

$$z-x = z-\frac{(zz+aa)}{2z} = \frac{2zz-zz-aa}{2z}; \text{ das iſt}$$

$$\frac{zz-aa}{2z} = z-x; \text{ aber Nr. I.}$$

$\sqrt{(xx-aa)} = z-x$, folgl.

Nr. III. $\frac{zz-aa}{2z} = \sqrt{(xx-aa)}$;

weil aber Nr. II. $x = \frac{zz+aa}{2z}$ gefunden;

ſo iſt $dx = \frac{zz-aa}{2zz}\,dz$; und alſo

$$\frac{dx}{\sqrt{xx-aa}} = \frac{zz-aa}{2zz}\,dz \,.\, \frac{2z}{zz-aa} = \frac{dz}{z},$$

wel-

welches ein logarithmiſches Differenziale iſt, wie wir unten zeigen; und welches integrirt $= lz = l(x+\sqrt{(xx-aa)})$.

§. 1054. Exempel von Differenzialgleichungen, die durch eine doppelte Differenziation endlich ihr Integrale geben.

Satz. $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ giebt integrirt eine Gleichung für den Zirkel. Man ſetze $dy = pdx$, ſo wird ſich die Gleichung verwandeln in

$$ydx - xpdx = a\sqrt{(dx^2 + ppdx^2)}$$

$$:dx$$

Nr. I. $y - xp = a\sqrt{1+pp}$; man differenz. wieder, ſo iſt

$$dy - xdp - pdx = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

$dy = pdx$ ſubſtituirt, folglich

$$-xdp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}, \text{ und}$$

Nr. II. $x = -\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$; aber aus Nr. I.

$y = a\sqrt{(1+pp)} + xp$; den Werth von x ſubſtituirt, giebt

$$y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}, \text{ daher}$$

$$\frac{x}{y} = -p, \text{ oder } p = -\frac{x}{y}; \text{ und folgl.}$$

wieder $y = \frac{a}{\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}}$, und alſo $y^2 + x^2 = a^2$,

eine Gleichung für den Zirkel.

§. 1055.

§. 1055. Anmerk. Dieſe Auflöſung habe ich vor 16 Jahren an Hrn. Prof. Käſtner überſchrieben, der ſie in das Hamb. Magaz. T. X. p. 637. folgg. unter meinem Namen eingerückt hat; man kann durch Verwandlung mehrere Integrationsformeln finden, die man durch die ordentliche Regeln nicht bekömmt; hier habe ich nur die Nöthigſte anführen wollen.

Von der Quadratur der krummen Linien.

§. 1056. **Erklär.** Wenn *Fig.* 114. die Abſciſſe AP um Pp wächſt, folglich die korreſpondirende Ordinate pm wird, ſo heißt das Trapezium PpmM, das Differenziale der ſich verändernden Fläche AMP.

§. 1057 **Zuſatz.** Weil AP = x, ſo iſt Pp = dx, und pm = PM + Rm = y + dy. Nun iſt PMmp = PMRp + MmR = ydx + $\frac{1}{2}$dxdy, wofür man ydx ſchreibt, weil $\frac{1}{2}$dxdy gegen ydx unendlich klein iſt und verſchwindet. Alſo iſt in allen Flächen das Differenziale der Fläche ydx.

§. 1058. Anmerk. So wird dieſe Lehre insgemein vorgetragen; Herr Prof. Käſtner giebt, um die geometriſche Schärfe augenſcheinlicher zu machen, folgenden Beweis: Die Fläche AMP wachſe, und verändere ſich, bis ANQ daraus wird; die urſprüngliche Fläche heiſſe Z; und ihr endliches Wachsthum ΔZ; ſo iſt

I. $\Delta Z < (PM + NS)PQ.$

II. $\Delta Z > (PM + \frac{1}{2}NS)PQ$; wo NS die Höhe des Rektangulums wird, des Dreyecks Höhe aber MSQ = P iſt.

Alſo Nr. I. $\dfrac{\dfrac{\Delta Z}{PQ}}{} < PM + NS$: PM

$$\frac{\Delta Z}{PM \,.\, PQ} < 1 + \frac{NS}{PM.}$$; und eben ſo

Nr. II. $$\frac{\Delta z}{PM \,.\, PQ} > 1 + \frac{NS}{2PM.}$$

Da nun die Ordinaten unendlich nahe, wie pm, PM kommen können, ſo kann $\frac{NS}{PM}$ unendlich abnehmen, und kleiner werden,

als

als jede angebliche Größe. Demnach kann der Quotient $\frac{\Delta Z}{PM.PQ}$ der Einheit unendlich nahe kommen, und muß endlich = 1 werden, wenn $\frac{NS}{PM}$ und $\frac{NS}{2PM}$ kleiner, werden als jede angebliche Größe (quavis data minor); folglich keinen Unterſcheid mehr haben. Iſt aber dieß, ſo wird $PQ = Pp = dx$; und $\Delta Z = dZ$; folglich $\frac{dZ}{ydx} = 1$. und $dZ = ydx$; das iſt, das Differenziale der Fläche wird $= ydx$. Man ſehe Herrn Prof. Käſtners, Anfgr. IV. Th. §. 20.

§. 1059. **Lehrſatz.** Die Apolloniſche Parabel läßt ſich quadriren.

Satz. $\int(ydx) = \frac{2}{3}xy$. *Fig.* 114.

Beweis.

$$ax = y^2 \quad \sqrt{\ } \text{ extrah.}$$

$$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y \quad .\,dx$$

$$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = ydx$$ das Flächendifferenzial; dieß integrirt giebt

$$\int(ydx) = \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x^1 = \frac{2}{3}x\sqrt{ax} = \frac{2}{3}xy + C.$$

C zu finden, ſetzt man nach §. 1047. $x = 0$; folglich wird auch $\frac{2}{3}xy + C = 0$, und $C = 0$; hier darf daher kein C addirt werden; und das Integrale iſt $\frac{2}{3}xy$ (*).

(*) Erſter Zuſatz. Es ſey P der Brennpunkt, ſo iſt der Inhalt des paraboliſchen Stückes, $= \frac{1}{12}a^2$; denn in dieſem Falle iſt $x = \frac{1}{4}a$ u. $y = \frac{1}{2}a$; folglich $\frac{2}{3}xy = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{2a^2}{24} = \frac{1a^2}{12}$.

Zweyter Zuſatz. Wenn man vom Scheitelpunkt der Parabel bis an den Punkt, wo ſie von der halben Ordinate durchſchnitten wird, eine gerade Linie AM zieht, ſo wird das dadurch abgeſchnittene Flächenſtück der Parabel $= \frac{1}{6}xy$; denn der Inhalt des rechtwinklichten Dreyecks iſt $\frac{1}{2}xy$; der Inhalt des paraboliſchen Stückes AMP $= \frac{2}{3}xy$; alſo dieſes Dreyeck abgezogen iſt $\frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}xy = \frac{4}{6}xy - \frac{3}{6}xy = \frac{1}{6}xy$.

§. 1060. Anmerk. Man kann auf dieſe Weiſe eines Dreyecks Inhalt finden; damit man in geradelinigten Figuren die Probe ſehe; es heiße *Fig.* 66. α. β. $BD = a$, $AC = b$, $bd = x$, $ac = y$. ſo iſt, weil

$$BD : AC = bd : ac$$
$$a : b = x : y$$

folglich $\frac{bx}{a} = y$ die Gleichung für das Δ

$$\overline{\qquad\qquad} \; . \, dx$$

$$\frac{bxdx}{a} = ydx$$ das Flächendifferenzial, dieß integrirt giebt.

$s(ydx) = \frac{bx^2}{2a} = \frac{yx}{2} = \frac{ab \,.\, ac}{2}$, wie ſchon in der Geometrie aus andern Gründen bewieſen wurde. Eben das erhellt auch aus *Fig.* 186. β.

§. 1061. Das paraboliſche Segment PMNQ läßt ſich quadriren.

Denn es ſey *Fig.* 114. $AP = b$, $PQ = x$, $QN = y$. ſo iſt $AQ = b + x$; folgl. $ab + ax = y^2$

und $\sqrt{ab + ax} = y$.

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; . \, dx$$

$dx\sqrt{ab + ax} = ydx$, nun ſetze man

$\sqrt{(ab + ax)} = v$; ſo iſt

$ab + ax = v^2$, und

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$adx = 2vdv$

$$\overline{\qquad\qquad} \; : a$$

$$dx = \frac{2v\,dv}{a},$$ und

$$ydx = \frac{2v^2dv}{a};$$ folglich

$\int(ydx) = \frac{2}{3}v^3 = \frac{2}{3}(ab + ax\sqrt{(ab + ax)} = \frac{2}{3}(b + x)\sqrt{(ab + ax)} + C$. Man ſetze $x = 0$; ſo iſt $\frac{2}{3}(b + 0)\sqrt{ab + 0)} + C = 0$, das iſt $\frac{2}{3}b\sqrt{ab} + C = 0$, folglich $C = -\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Alſo muß man von dem obigen Integrale noch dieſen Werth abziehen. In der Figur iſt er AMP; denn man hat das ganze Stück AMNQ quadrirt; man verlangt aber nur PMNQ; darum muß man das erſte abziehen, weil $PMNQ = AMNQ - AMP = \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{ab + ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Man ſieht, wie man die Konſtantes auch in der Zeichnung ausgedrückt finde.

§. 1062. **Anmerk.** Für die Hyperbel, wo $y = \frac{a^3}{x^2}$, iſt $ydx = a^3x^{-2}dx$; dieß integrirt giebt

$$\int ydx = \frac{a^3x^{-1}}{-1} + C = -\frac{a^3}{x} + C.$$

Setzt man $x = 0$, ſo iſt $-\frac{a^3}{0} = \infty$.

Wo man daher x, *Fig.* 117. auf der Horizontalſeite, und eben auch daſelbſt C als den Raum auf dieſer Seite annehmen muß.

Die Rektifikation der krummen Linien, beſonders auch der Neiliſchen Parabel.

§. 1063. **Lehrſatz.** Wenn *Fig.* 114. der Bogen AM um Mm wächſt, ſo heißt Mm ſein Differenziale, und dieß Differenziale, geſetzt daß $AM = s$, heißt, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

Beweis.

Mm ſey unendlich klein, und alſo von der Sehne um keine angebliche Gröſſe unterſchieden, ſo iſt

$Mm = \sqrt{(MR^2 + Rm^2)}$ nach den Pythag. Lehrſ.;

aber $MR = Pp = dx$, und

$Rm = dy$.; folglich

$Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

§. 1064. Anmerk. Wenn man die Linie AM bis N wachſen laßt, ſo iſt die Sehne von MN kleiner als der Bogen; dieſe Differenz ſey p; ſo iſt $\frac{MN}{\sqrt{MS^2 + SN^2}} = 1 + p$; da nun p unendlich abnehmen, und kleiner werden kann als jede angebliche Gröſſe, weil pm und PM unendlich nahe zuſammen rücken können, ſo wird in dieſem Fall $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 1$., und $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Das iſt Euklideiſch geſchloſſen, wie oben, aus dem Begriff einer Gröſſe, die kleiner werden kann, als jede angebliche Größe (quavis data minor.) Der obige gewöhnliche Ausdruck ſagt eben das, nur mit andern Worten.

§. 1065. Zuſatz. Wenn man alſo in einer gegebenen Gleichung $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ausdrückt, und hernach den Ausdruck integriren kann, ſo hat man die krumme Linie rektifizirt.

§. 1066. Lehrſatz. Die Neiliſche Parabel, in welcher $y^3 = ax^2$, läßt ſich vollkommen rektifiziren.

Beweis

$y^3 = ax^2$

——— $\sqrt{}$ extrah.

$y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}x$

——— Differenzirt

$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy = a^{\frac{1}{2}}dx$

——— : $a^{\frac{1}{2}}$

$\frac{3}{2}y$

$\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy : a^{\frac{1}{2}} = dx$; das iſt §. 188.

$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{a}}\, dy = dx$; und quadrirt

$\frac{9y}{4a} dy^2 = dx^2$; folglich

$dy^2 + dx^2 = dy^2 + \frac{9y dy^2}{4a} = (1 + \frac{9y}{4a}) dy^2$;

daher $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{9y}{4a})}$;

das iſt unter einerley Benennung gebracht, und aus dem Nenner die Wurzel wirklich extrahirt

$$= \frac{dy\sqrt{(4a+9y)}}{2\sqrt{a}} = \frac{dy.(4a+9y)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{a}}.$$

Wenn man nun dieſen Ausdruck integriren kann, ſo iſt die Parabel rektifizirt. Dieſer Ausdruck läßt ſich nach dem Lehrſatz §. 1049. integriren, wenn man für die dortige Buchſtaben y, a, b, n, p, r die hier vorkommende ſubſtituirt y, 4a, 9, 1, ½, 0.

Daher das Integrale $\frac{\int(dy.(4a+9y)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{a}}$

$= \frac{2}{27}z^{\frac{3}{2}} : 2\sqrt{a}) + C. = \frac{1}{27}z\sqrt{\frac{z}{a}} + C.$

Das C zu finden ſetzt man, weil x und y zugleich = 0, auch s = 0; folglich da

$s = \frac{1}{27}(4a+9y)\sqrt{(4 + \frac{9y}{4a})} + C,$

$0 = \frac{1}{27}4a.2 + C.$; daher

$C = -\frac{8a}{27}$, und alſo $s = \frac{1}{27}(4a+9y)\sqrt{(4 + \frac{9y}{4a})} - \frac{8a}{27}$.

§. 1067. **Anmerk.** Dieſes iſt die erſte krumme Linie, die man rektifizirt hat. Wilhelm Neil, ein Engländer, der den mathem. Wiſſenſchaften Ehre gemacht hätte, wenn er länger gelebt hätte, hat ihre Rektifikation erfunden, und im 20 Jahr ſeines Alters 1657 bekannt gemacht; daher heißt ſie auch die Neiliſche Parabel. Der Titel ſeiner Schrift heißt: *Aequatio lineae rectae cum parabola.* Man begreift aber von ſelbſt, daß er ſie nicht durch die damals noch nicht erfundene oder wiedererfundene Differenzial- und Integralrechnung aufgelöſet habe.

§. 1068. **Zuſatz.** Es ſey das Element der Neiliſchen rektifizirten Parabel gleich dem Element einer Fläche durch eine beſtändige Gröſſe dividirt; dieß Element ſey $\frac{zdy}{a}$, wo y der andern krummen Linie Abſciſſe iſt; ſo iſt

$$dy^2(4a+9y) = \frac{z^2dy^2}{a^2}; \text{ und}$$

$$\frac{4a+9y}{4a} = \frac{z^2}{a^2}; \text{ folglich}$$

$$4a^2+9ay = 4z^2. \text{ Es ſey}$$

$$y = u + e; \text{ ſo iſt}$$

$$4aa+9au+9ae = 4z^2. \text{ Es ſey}$$

$$4aa+9ae = 0; \text{ ſo iſt}$$

$9au = 4z^2$ oder $\frac{9}{4}au = z^2$ eine Apolloniſche Parabel, deren Parameter $= \frac{9}{4}a$; folglich iſt das Flächenelement durch a dividirt in der Apolloniſchen Parabel dem Längenelement der Neiliſchen gleich; und weil man die erſte quadriren kann, ſo läßt ſich die andere rektifiziren, oder ihre Rektifikation wird dadurch begreiflich.

§. 1069. **Lehrſatz.** Die Apolloniſche Parabel läßt ſich anders nicht als durch eine unendliche Reihe, nach dem binomiſchen Lehrſatz rektifiziren. Es iſt in der Apolloniſchen Parabel

$ax = y^2$; ſolglich

$adx = 2ydy$, und $dx = \frac{2ydy}{a}$, und

$dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$; ſolglich

$$dy^2 + dx^2 = dy^2 + \frac{4yy}{aa}dy^2 = (1 + \frac{4yy}{aa})\,dy^2;$$ und

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{4yy}{aa})}; = \frac{dy}{a}\sqrt{(a^2+4y)^2}$$

der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen giebt nach dem Newtoniſchen Binomium (*)

$$ds = dy\,(1 + \frac{2yy}{aa} - \frac{2y^4}{a^4} + \frac{4y^6}{a^6} - - -);$$

und integrirt, oder

$$S = y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6}.$$

(*) Die Newtoniſche Formel iſt.

$$P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ \text{ u. ſ. f.}$$

Es iſt alſo hier $P = a^2, \frac{m}{n} = \frac{1}{2}, A = a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a$; $Q = \frac{4y^2}{a^2}$;

und alſo die Quadratwurzel von $a^2 + 4y^2$

$$= a^{\frac{2}{2}} + \tfrac{1}{2}a.\frac{4y^2}{a^2} + \frac{1-2}{4}.\frac{2y^2}{a}.\frac{4y^2}{a^2} + \frac{1-4}{6}.-\frac{2y^4}{a^3}.\frac{4y^2}{a^2} \text{ u. ſ. f.}$$

$$= a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} \text{ u. ſ. f.} = \sqrt{a^2 + 4y^2};$$ und beyderſeits durch $\frac{dy}{a}$ multiplizirt, iſt:

$$\frac{dy}{a}\sqrt{a^2+4y^2} = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} \text{ u. ſ. f.}$$

§. 1070. **Zuſatz.** Weil $\frac{1}{2}ds = \frac{2dy}{a}$ geſetzt, $zz = \frac{1}{4}aa + yy$ der gleichſeitigen Hyperbel Gleichung giebt, ſo könnte man, wie oben §. 1068. auch die Apolloniſche Parabel rektifiziren, wenn man die Hyperbel durch einen endlichen Ausdruck quadriren könnte.

Newtons und Leibnitzens Methoden den Zirkel zu quadriren und zu rektifiziren, nebſt Diff. Formeln für den Zirkel.

§. 1071. **Lehrſatz.** Die Quadratur des Zirkels giebt eine unendliche Reihe; wenn der Diameter des Zirkels $= 1$, ſo iſt ſeine Gleichung $y^2 = x - x^2$; folglich

$$y = \sqrt{(x - x^2)} = (x - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \cdot dx$$

$ydx = dx(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ das Flächendifferenzial.

Aber die Quadratwurzel aus $x - x^2$ giebt nach dem Newtoniſchen Binomium eine unendliche abwechſelnde Reihe, und es wird

$$ydx = (x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} \ldots\ldots)dx.$$ Dieß integrirt, giebt

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} \ldots - \ldots$$

§. 1072. **Lehrſatz.** Eben ſo giebt die Rektifikation eine unendliche Reihe. Denn es ſey *Fig.* 115. $Mm = ds$; man ziehe die Tangente AB, und die Sekante CB, und dieſer durch m die andere Cb unendlich nahe, ſo iſt, wenn der Radius $AC = 1$, Tang. $= t$; nach dem Pythag. Lehrſ. $CB = \sqrt{(AC^2 + AB^2)} = \sqrt{(1 + tt)}$, und die Proportion $CB : CA = Bb : Bu$, weil $\triangle ABC \sim Bbu$. Das iſt in Buchſtaben

$$\sqrt{(1 + tt)} : 1 = dt : Bu; \text{ folglich } Bu = \frac{dt}{\sqrt{1 + tt}},$$ weil dt das Diff. der Tang. iſt.

Es

Es iſt ferner

CB : Bu = CM : Mm; das iſt

$\sqrt{(1+tt)} : \frac{dt}{\sqrt{(1+tt)}} = 1 : Mm = \frac{dt}{1+tt}$, das Differ. von dem Bogen AM.

Aber $\frac{dt}{1+tt} = dt \cdot \frac{1}{1+tt}$; und $\frac{1}{1+tt}$ giebt eine unendliche Reihe nach §. 157. wovon das Integrale, wie oben geſucht wird; iſt nun t = die Tang. von 45°, ſo iſt t=1; §. 768. folglich wird die Reihe ſeyn

$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots$

das iſt, der rektifizirte Bogen von 45° iſt dem Radius gleich, weniger $\frac{1}{3}$, mehr $\frac{1}{5}$, weniger $\frac{1}{7}$ vom Radius u. ſ. f.

§ 1073. Anmerk. Dieſe Rektifikation hat Leibniz geſucht; wie die Quadratur Newton. Man merkt ſich aber beſonders das Differential des Bogens durch die Tangente ausgedrückt = $\frac{dt}{1+tt}$, weil es von mehrerem Gebrauch iſt.

§. 1074. Zuſatz. Eben ſo iſt das Differenzial eines Bogens aus dem Sinus zu merken, das ſehr häufig vorkömmt, und in Rechnungen genützt wird. Wenn AMN *Fig.* 114. eine Zirkellinie wäre, und Q das Zentrum, PM der Sinus des Bogens AM; ſo iſt, wenn Am = a, der Sinus PM = s, der Koſinus PQ = $\sqrt{(rr - ss)}$ nach §. 700., und AP = AQ — PQ = r — $\sqrt{(rr-ss)}$; dieß differenzirt, giebt $d(AP) = -\frac{sds}{\sqrt{(rr-ss)}}$ nach §. 992. = Pp = MR = dx,

folglich iſt hier da = Mm = $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(d.AP^2 + d.PM^2)} = \sqrt{d.\left(\frac{-sds}{\sqrt{(rr-ss)}}\right)^2 + ds^2} =$

$\sqrt{\frac{d.ssds^2}{rr-ss} + ds^2} = \sqrt{\frac{rrds^2 - ssds^2 + ssds^2}{rr-ss}} = \sqrt{\frac{rrds^2}{rr-ss}}$

$= \frac{rds}{\sqrt{(rr-ss)}}$. Dieſer Ausdruck $da = \frac{rds}{\sqrt{rr-ss)}}$ kömmt nicht nur häufig vor, ſondern läßt ſich auch, wenn $r = 1$, ausdrücken $da = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$.

§. 1075: **Zuſatz.** Weil $da = \frac{rds}{\sqrt{(rr-ss)}}$, und dieß

$$= \frac{rds}{r(\sqrt{1-\frac{ss}{rr}})} = \frac{ds}{\left(1-\frac{ss}{rr}\right)^{\frac{1}{2}}} = ds\,(1-ss)^{-\frac{1}{2}} \text{ §. 190.}$$

ſo läßt ſich der Ausdruck nach dem Newtoniſchen Binomium in eine unendliche Reihe verwandeln, die alſo heißt:

$$da = ds\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{ss}{rr}\right) + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 4}\left(\frac{ss}{rr}\right)^2 + \frac{1.3.5}{1.2.3.8}\left(\frac{ss}{rr}\right)^3 \,..$$

Das Integrale iſt

$$\int(da) \text{ oder } a = s + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \frac{s^3}{r^2} + \frac{1 \cdot 3}{1.2.4} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \frac{s^5}{r^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1.2.3.8} \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \frac{s^7}{r^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1.2.3.4.16} \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \frac{s^9}{r^8} \text{———.}$$

§. 1076. **Zuſatz.** Eben ſo kann man, wenn man die Reihe umkehrt, um die Geſtalt der Reihe zu wiſſen, aus dem Bogen den Sinus finden; wo hernach die Koeffizienten, wie § 995. beſtimmtwerden.

§. 1077. **Zuſatz.** Man kann auch aus dem Querſinus den Bogen, und umgekehrt, ferner aus dem Bogen den Koſinus, aber hier nicht umgekehrt, aus dem Bogen die Tangente, und umgekehrt, wie oben §. 1072.; ferner, aus dem Bogen die Kotangenten, Sekanten, Koſekanten finden; die Rechnungen ſind nicht viel von einander unterſchieden, wenn man nur die Erklärung der trigonometriſchen Linien weis, und würden für gegenwärtiges Handbuch zu weitläuftig ſeyn.

Die

Die umgekehrte Methode der Tangenten. (Methodus Tangentium inverſa.)

§. 1078. **Erklär.** Weil die Subtangente allgemein $\frac{ydx}{dy}$ iſt, ſo wird die krumme Linie umgekehrt gefunden, für welche ein anderer Ausdruck der Subtangente gegeben iſt.

§. 1079. Anmerk. Man ſoll die krumme Linie finden, deren Subtangente $\frac{2y^2}{a}$; ſo iſt

$$\frac{ydx}{dy} = 2y^2 : a$$

$$ydx = 2y^2dy : a$$

$$: y$$

$$adx = 2ydy : a; \quad \text{und integrirt}$$

$$ax = y^2. \quad \text{die Apolloniſche Parabel.}$$

§. 1080. **Aufgabe.** Man ſoll die krumme Linie finden, deren Subnormallinie beſtändig iſt. Weil $\frac{ydy}{dx}$ der Ausdruck für alle Subnormallinien, ſo iſt $\frac{ydy}{dx} = a$, alſo $ydy = adx$, dieß integrirt, giebt $\frac{1}{2}y^2 = ax$, und $y^2 = 2ax$; wo der Parameter $2a$, folglich die Subnormallinie dem halben Parameter gleich iſt.

§. 1081. **Aufgabe.** Die krumme Linie zu finden, deren Subtangente beſtändig iſt. Es iſt alſo $\frac{ydx}{dy} = 1$, folglich $ydx = dy$ und $dx = \frac{dy}{y}$; aber nach §. 1040. iſt $\frac{dy}{y}$ das Differenziale der Logiſtik, oder $dx = 1 \, . \, dy$.

§. 1082. Anmerk. Dieß giebt uns Anlaß, von den logarithmiſchen Differenzialien und dahin gehörigen Rechnungen zu handeln, welche eine Erfindung von Joh. Bernoulli ſind.

Die logarithmiſchen Differenzialien, und der Unterſchied der natürlichen oder hyperboliſchen, und der künſtlichen Logarithmen.

§. 1083. **Erklär.** Wenn für 1 nach §. 1081. geſetzt wird a, ſo iſt $a \,.\, \frac{dy}{y} = dx$; und $a\int \frac{dy}{y} = l.y = x$; ſo iſt $\frac{dx}{x} = lx$, $\frac{dz}{z} = l.z$, u. ſ. w. Der Grund iſt §. 1040. zu finden.

§. 1084. **Zuſatz.** Wenn nach den gewöhnlichen Regeln integrirt würde, ſo wäre, wenn $\frac{ady}{y} = ay^{-1}dy$, integrirt $\int.dx = \int.ay^{-1}dy = \frac{ay^{-1+1}}{-1+1} = \frac{ay^0}{0} = \infty + C$ Dieß gäbe was Unendliches, das nicht gebraucht werden kann; alſo bleibt nichts übrig, als daß nach dem Geſetz der logarithmiſchen Linie, oder nach den logarithmiſchen Syſtem $a\int \frac{dy}{y} = l.y = x$.

§. 1085. **Lehrſatz.** Man ſetze $y = 1 + u$, ſo verwandelt ſich, weil $dx = \frac{ady}{y}$, der Ausdruck in $a.\ \frac{d.(1+u)}{1+u} = a\,.\ \frac{du}{1+u} = dx$. Denn $1 + u$ differenzirt $= du$, weil 1 Conſtans. Dieß giebt eine unendliche Reihe nach §. 157. wo

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 \text{———} \quad \text{folgl.}$$

a

$$\frac{a \,.\, du}{1+u} = a(du - udu + u^2du - u^3du + u^4du. - -)$$

$$\text{as}\, \frac{du}{1+u} = a(u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{5}u^5 - - - -),$$

wo die Konſt. $= 0$, für $u = 0$, weil $l.\ 1 = 0$. alſo $l.$ $1 + u = x = \int \frac{du}{1+u}$, wenn $a = 1$.

§. 1086. **Zuſatz.** Eben ſo iſt

$$\frac{a-du}{1-u} = a - du(1 + u + u^2 + u^3 \ldots)\ §.\ 162.$$

$$\int \frac{a - du}{1-u} = a.(-u - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 \ldots).$$

§. 1087. **Zuſatz.** Man kann alſo eine ſich ſchneller nähernde (ſchneller konvergirende) Reihe finden, wenn man die leztere Reihe von der erſten ſubtrahirt, durch welche Operation nach §. 305. $l.\ \frac{1+u}{1-u}$ herauskömmt; weil die Diviſion ſich bey den Logarithmen in eine Subtraktion verwandelt; folglich

$$(l.1 + u) = a.(+u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{5}u^5 \ldots)$$
$$(l.1 - u = a.(-u - \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 - \tfrac{1}{5}u^5 \ldots)$$

ſubtr.

$$l.\ \frac{1+u}{1-u} = a.2u + 2.\tfrac{1}{3}u^3 + 2.\tfrac{1}{5}u^5 \ldots$$
$$= a.2(u + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{7}u^7 \ldots$$

§. 1088. **Exemp.** So finden ſich die natürlichen Logarithmen der erſten 10 Zahlzeichen, wenn man ſezt

Erſtl. $u = \frac{1}{5}$ daraus, $\frac{1+u}{1-u} = \frac{\frac{5}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{2}\frac{2}{2} = \frac{3}{2}$.

II. $u = \frac{1}{7}$, daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{8}{7} : \frac{6}{7} = \frac{4}{3}\frac{2}{2} = \frac{4}{3}$

III.

III. $u = \frac{1}{9}$, daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{10}{9} : \frac{8}{9} = \frac{90}{72} = \frac{5}{4}$.

IV. $u = \frac{1}{99}$, daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{100}{99} : \frac{98}{99} = \frac{9900}{9702} = \frac{50}{49}$.

Nun ſuche man für die kleinen Brüche $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{50}{49}$ die Logarithmen, welches leicht geſchiebt, weil die Brüche für u klein ſind. Hat man dieſe, ſo hat man auch die Logarithmen für die 10 erſten Zahlzeichen bald gefunden; denn es iſt, weil die Multiplikation bey Logarithm. in eine Addition ſich verwandelt;

I. $l.\ \frac{3}{2} + l.\ \frac{4}{3} = l.\ \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = l.\ \frac{12}{6} = l.\ 2$.

II. $l.\ \frac{3}{2} + l.\ 2 = l.\ \frac{3}{2} \cdot 2 = l.\ \frac{6}{2} = l.\ 3$.

III. $2 l.\ 2 = l.\ 2^2 = l.\ 2 \cdot 2 = l.\ 4$.

IV. $l.\ \frac{5}{4} + l.\ 4 = l.\ \frac{5}{4} \cdot 4 = l.\ \frac{20}{4} = l.\ 5$.

V. $l.\ 2 + l.\ 3 = l.\ 2 \cdot 3 = l.\ 6$.

VI. $2\ l.\ 5 + l.\ 2 = l.\ 5^2 \cdot 2 = l.\ 25 \cdot 2 = l.\ 50$; aber $l.\ 50 - l.\ \frac{50}{49} = l.\ 50 : \frac{50}{49} = l.\ \frac{2450}{50} = l.\ 49$; und endlich $\frac{1}{2}\ l.\ 49 = l.\ 49^{\frac{1}{2}} = l.\ \sqrt{49} = l.\ 7$.

VII. $3\ l.\ 2 = l.\ 2^3 = l.\ 2 \cdot 2 \cdot 2 = l.\ 8$.

VIII. $2\ l.\ 3 = l.\ 3^2 = l.\ 3 \cdot 3 = l.\ 9$.

IX. $l.\ 2 + l.\ 5 = l.\ 2 \cdot 5 = l.\ 10$.

So iſt der Logarithmus von 10 in Zahlen wirklich nach der Dezimalprogreſſion ausgedrückt

2, 302585092994045684017914.

§. 1089. **Erklär.** Wenn man in dem Ausdruck $\int \frac{ady}{y} = ly$ ſetzet $a = 1$, ſo heiſſen die herauskommende Logarithmen natürliche Logarithmen, und die andere nach den Abſciſſen und Subtangenten ſind künſtliche.

§. 1090. **Zuſatz.** Weil $dx = \frac{adu}{1+u}$, ſo iſt umgekehrt $dx + udx = adu$, und $dx = adu - udx$, und $du - \frac{udx}{a} = \frac{dx}{a}$; folglich läßt ſich die Zahl u umgekehrt durch die Logarithmen ausdrücken, und zwar in einer unendlichen Reihe.

§. 1091.

§. 1091. Wenn *Fig.* 117. eine Apolloniſche Hyperbel iſt, deren Potenz = 1, und AP = 1 + u, PM = y, ſo iſt nach §. 936. y(1 + u) = 1, und $y = \frac{1}{1+u}$ folglich; das Flächendifferenzial $ydu = \frac{du.}{1+u} = d(l1 + u)$; alſo wird die Hyperbel durch die logarithmiſchen Reihen quadrirt, und daher heißt man die natürlichen Logarithmen auch hyperboliſche Logarithmen, wegen ihrer Uebereinſtimmung mit der Quadratur der Hyperbel. Uebrigens gehören auſſer der natürlichen Logarithme einer jeden Zahl noch unzählich viel unmögliche Logarithmen zu, wie Herr Prof. Euler bewieſen hat Anal. Inf. L. I. C. 6. 7. daher die logarithmiſche Linie eine tranſcendentiſche iſt.

Die Exponentialrechnung nebſt einigen Integralformeln für logarithmiſche Differenzialien.

§. 1092. **Erklär.** Wenn der Exponent einer Gröſſe veränderlich iſt, alſo x, y, z heißt, ſo heißt die Gröſſe ſelbſt eine Exponenzialgröſſe; z. E. a^x, b^y, x^y, y^z.

§. 1093. **Lehrſatz.** Die Exponentialgröſſen werden differenzirt, wenn ſie auf logarithmiſche Ausdrücke reduzirt werden. Denn es ſey

$x^y = z$, ſo iſt nach §.308.

$ylx = lz$; alſo differenzirt

$lxdy + ydlx = d.lz$; aber

$dlx = \frac{dx}{x}$; folglich ſubſtituirt

$$lxdy + y\frac{dx}{x} = d.lz = \frac{dz}{z}.$$

§. 1094.

§. 1094. **Zuſatz.** Erinnert man ſich noch, daß die Exponenten die Logarithmen der Potenzen ſind, ſo wird man ſich in dieſe Regel finden; auch ſchlieſſen, daß eine jede Exponentialgröſſe ſich in eine logarithmiſche Reihe verwandeln laſſe.

§. 1095. **Lehrſatz.** Das Integrale von $\frac{dx}{1-xx}$ iſt $= \frac{1}{2}l\frac{1-x}{1+x}$.

Satz. $\int\frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{2}l.\frac{1-x}{1+x}$.

Beweis.

Es ſey $dy = \frac{dx}{1-xx} = dx.\frac{1}{1-x^2}$, ſo iſt;

weil $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$ (welches alſo erwieſen wird: man bringe beyde Brüche unter einerley Benennung, ſo iſt $\frac{1.2(1-x)+1.2(1+x)}{2(1+x).2(1-x)} = \frac{2+2x+2-2x}{4-4x^2}$ d.i. wenn man 2x gegen -2x aufhebt $= \frac{4}{4-4xx}$ oder $= \frac{1}{1-x^2}$).

$dy = dx\left(\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}\right)$

Es ſey $2+2x = u$, und $2-2x = z$; ſo iſt

$2dx = du$, $-2dx = dz$

$dx = \frac{1}{2}du$, $-dx = -\frac{1}{2}dz$; flg.

$dx.\frac{1}{2+2x} = \frac{1}{2}du:u$; $-dx.\frac{1}{2-2x} = -\frac{1}{2}dz:z$;

das iſt $= \frac{du}{2u}$, $= -\frac{dz}{2z}$;

folglich $dy = \frac{du}{2u} - \frac{dz}{2z}$, ein logarithm. Differenzial; alſo

$y = \frac{1}{2}lu - \frac{1}{2}lz$; und den Werth von u und z ſubſtituirt,

$y = \frac{1}{2}l(2+2x) - \frac{1}{2}l.(2-2x) = \frac{1}{2}l.\frac{2+2x}{2-2x}$, weil die Logarithm. die Diviſion in eine Subtraktion verwandeln;

oder $y = \frac{1}{2}l.\frac{1+x}{1-x}$, wenn man mit 2 aufhebt.

Joh. Bernoulli Vergleichung der Ausſchnitte des Zirkels und der Hyperbel.

§. 1096. **Lehrſatz.** Es ſey ein Zirkelbogen v, ſeine Tangente heiſſe $= q$, ſo iſt $dv = \frac{dq}{1+qq}$ nach §. 1073.; und wenn der Radius $= 1$, der korreſpondirende Sektor $\frac{1}{2}dv = \frac{\frac{1}{2}dq}{1+qq}$; denn wenn man den Bogen in den halben Radius multiplizirt, ſo hat man den Sektor nach der Element. Geom.

Man ſuche den korreſpondirenden hyperboliſchen Ausdruck, wenn die Tangente der Hyperbel $= p$; da dann $dv = \frac{dp}{1-pp}$, und $\frac{1}{2}dv = \frac{\frac{1}{2}dp}{1-pp}$; weil, wie wir ſogleich zeigen, der Ausdruck für die Hyperbel nur umgekehrt iſt, oder das negative Zeichen hat; dieſe beyden Sektoren ſoll man nun mit einander vergleichen.

Man ſetzt alſo, wenn die Vergleichung angehen ſoll, $+qq = -pp$. daher wenn man die Wurzel auszieht $q = p\sqrt{-1}$. ——— und

Nr. I. $\frac{q}{\sqrt{-1}} = p$; das iſt nach §. 336. $-q\sqrt{-1} = p$; folglich ſubſtituirt $\frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}\frac{dp\sqrt{-1}}{1-pp}$. Da nun

$$\int \frac{1}{2}\frac{dp}{1-pp} = \frac{1}{2}l.\frac{1+p}{1-p}$$ nach §. 1095; ſo iſt

Nr. II. $\frac{1}{2}\int dv = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.\, \frac{1+p}{1-p}$; u. weil $+p = -q\sqrt{-1}$ Nr. I., folgl. $-p = +q\sqrt{-1}$; ſo iſt

Nr. III. wenn man ſubſtit. $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ l. $\frac{1-q\sqrt{-1}}{1+q\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\int dv$.

Dieſer Ausdruck verwandelt ſich in folgenden, wenn man immer $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ für $-\sqrt{-1}$, und umgekehrt nach §. 336. ſetzt,

$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}.\,l.\,\frac{1-q\sqrt{-1}}{1+q\sqrt{-1}}$, und die Zeichen verändert

$+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l.\,\frac{1+q\sqrt{-1}}{1-q\sqrt{-1}}$; und nochmal ſubſt. $\frac{1}{\sqrt{-1}}$

$+\frac{1}{2\sqrt{-1}}.\,l.\,\frac{1+q.\frac{-1}{\sqrt{-1}}}{1+q.\frac{1}{\sqrt{-1}}}$. woraus der letztere Ausdruck. Unter einerley Benennung, weil der Diviſ. $\sqrt{-1}$ einerley,

$\frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$; alſo iſt das ganze Integrale

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}.\,l.\,\frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$.

§. 1097. **Zuſatz.** Hieraus folgt, daß der Ausſchnitt des Zirkels einem unmöglichen oder eingebildeten Ausſchnitt (imaginario Sectori) der Hyperbel, und umgekehrt gleich ſey. Die Urſache davon iſt folgende: r ſey zugleich der Radius des Zirkels und die halbe Axe der Hyperbel; ſo iſt, wenn die Ordinate des Zirkels y und der Hyperbel z, die Gleichung $y^2 = r^2 - x^2$; und $z^2 = x^2 - r^2$; jenes iſt nur möglich, wenn $x < r$; und dieſes wenn $x > r$; alſo wenn der einen Linie Ausſchnitte möglich werden, ſind der andern ihre unmöglich, und umgekehrt.

§. 1098. **Erklär.** Der hyperboliſche Ausſchnitt und deſſen Ausdruck $l(1+u)$ kann auch aus der Figur erwieſen werden; denn *Fig.* 117. heißt der Ausſchnitt CAM ein hyperboliſcher Ausſchnitt; er entſteht, wenn aus dem Mittelpunkt

punkt A nach dem Scheitel C und einem andern willkührlichen Punkt M gerade Linien gezogen werden.

§. 1099. **Lehrſatz.** Das Element von dieſem Sektor läßt ſich nun finden, und daraus eine Integralformel geben.

Denn es ſey CAm ein anderer Ausſchnitt, ſo iſt die Differenz beyder Ausſchnitte MAm.

Man nehme AM als einen Radius, und beſchreibe den Bogen MR damit, ſo hat man das Maaß des Winkels MAm. Ferner iſt $Rm = Am - AR$; aber

$$\underline{AR = AM}$$

$$Rm = Am - AM.$$

Geſetzt nun, die Punkte M und m ſeyn unendlich nahe beyſammen, ſo iſt MR ein Perpendikel auf Am, Mm eine gerade Linie, und MAm ein geradelinigtes Dreyeck, deſſen Inhalt nach geometriſchen Gründen $= \frac{MR \cdot Am}{2}$; nämlich die Höhe mit der Grundlinie multiplizirt, und durch zwey dividirt; dafür man, weil Rm unendlich klein, ſetzen kann $\frac{AM \cdot MR}{2}$. Dieſer Ausdruck $\frac{AM \cdot MR}{2}$ iſt das Differenzial vom hyperboliſchen Sektor CAM.

Man nenne die Abſciſſe $AP = w$, ſo iſt

Nr. I. Die Ordinate $PM = \frac{1}{w}$ nach §. 936.

Denn wenn die Potenz $= 1$, ſo iſt $1 = wy = PMAP$; $: w$
folglich

$$\frac{1}{w} = y = PM.$$

Nr. II. Tang. $MAP = \frac{PM}{w} = \frac{1}{ww}$, weil

$AP : PM = 1 : T . MAP$, das iſt

w

$$w : PM = 1 : \frac{PM}{w}; \text{ aber}$$

$$PM = \frac{1}{w} \text{ folgl. ſubſtit.}$$

$$\frac{PM}{w} = \frac{1}{w} : w = \frac{1}{ww} = w^{-2} \text{ nach §. 180.}$$

Alſo das Differ. von $\frac{1}{ww} = -2w^{-3}dw = -\frac{2dw}{w^3}$;

und das Differenzial des Winkels MAP, welches aus den Tangenten nach §. 1073 gefunden wird da $-\frac{de}{1+ee}$, hier den Werth von e ſubſtituirt, giebt diff. MAP $= -\frac{2dw}{w^3} : \left(1 + \frac{1}{w4}\right) = -\frac{2dw}{w^3} : \left(\frac{w4+1}{w^4}\right)$

und wenn man wirklich dividirt, das iſt mit dem umgekehrten dividirenden Bruch multiplizirt,

$-\frac{2w4dw}{w^3(w4+1)} = -\frac{2wdw}{w4+1}$, wenn man richtig aufhebt;

aber eben dieſes Differenzial iſt $= MAm$;

aber dieſer Winkel $MAm = \frac{MR}{AM}$ §. 582.

---

folglich

$$\frac{-\frac{2wdw}{w4+1} = \frac{MR}{AM}}{} \cdot AM$$

$$\frac{-\frac{2wdw}{w^4+1} \cdot AM = MR}{} \cdot \frac{AM}{2}$$

$$-\frac{wdw}{w^4+1} \cdot AM^2 = \frac{MR \cdot AM}{2} = \text{diff. Sectoris.}$$

Aber $AM^2 = AP^2 + MP^2$ nach dem Pythag. Lehrſatz

$= w^2 + \frac{1}{w^2}$ Nr. I. und unter einerl. Benenn.

$= \frac{w^4+1}{w^2}$

---

folgl. ſubſtit. $-\frac{wdw}{w4+1} \cdot \frac{w4+1}{w^2} = \frac{MR \cdot AM}{2}$ d. i. wirkl. multipl. und aufgehoben

$$-\frac{wdw}{w^2} = -\frac{dw}{w} = \frac{MR \,.\, AM}{2} = \text{diff. Sect.}$$

Es ſey $w = 1+u$, ſo iſt, weil $\frac{1}{w} = PM = y$

ſubſtituirt $-\frac{1}{w} \,.\, dw = -y \,.\, du$; oder

$$-\frac{dw}{w} = -ydu \text{ oder } +\frac{dw}{w} = ydu, \text{ deſſen}$$

Integrale $= l.\,(1+u)$, wo Conſt. $= 0$.

§ 1100. Anmerk. Der Ausdruck wird affirmativ, weil $CAM = 45° - AMP$, daher $dCAM = -d \,.\, PAM = +\frac{2wdw}{1+w^4}$. Denn es wurde oben nur deßwegen negativ, weil die nächſtfolgenden Winkel nach PAM kleiner werden, indem man aus dem Winkel PAM das Differenzial ſucht.

§. 1101. Anmerk. Wenn man die Ausſchnitte aus dem Mittelpunkt der Axe durch die Abſciſſen ausdrückt, ſo wird, wenn man überall richtig ſubſtituirt, und der Radius $= 1$, und die Tangente p iſt, das Integral $\frac{1}{2}\frac{l.\,1+p}{1-p}$, woraus obige Vergleichung §. 1096. erläutert wird. Die Rechnung iſt leicht, aber weitläuftig, daher wir ſie übergehen.

Einige andere Vergleichungen der Sinus, Koſinus, Tangenten, nach Joh. Bernoulli Methode.

§ 1102. **Lehrſatz.** Aus der Tangente x des einfachen Bogens, läßt ſich die Tangente y des nfachen Bogens finden. Weil die Tangenten x, y ſind, ſo iſt nach §. 1073. die Formel

$$\frac{ndx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}; \text{ folglich}$$

$\frac{n\int dx}{1+x^2} = \frac{\int dy}{1+y^2}$; alſo nach §. 1096., wo für p geſetzt wird x, und für q geſetzt y,

$$\frac{n}{2\sqrt{-1}} \cdot l\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot l\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$$; und wenn man die Zeichen der Logarithmen wegläßt nach §. 311.

$$\frac{(\sqrt{-1}-x)^n}{(\sqrt{-1}+x)^n} = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}.$$

Man ſuche nun eine Gleichung zwiſchen des Winkels ϕ und $n\phi$ ſeinem Sinus und Koſinus.

Man ſetze $x = \frac{b}{\beta}$, $y = \frac{p}{\pi}$ nach §. 720. Nr. III., wo

$b = \sin.\phi$, $\beta = \cos.\phi$; und $p = \sin.n\phi$; $\pi = \cos.n\phi$. Endlich ſetze man, um die Rechnung bequemer zu machen $\sqrt{-1} = \varepsilon$, ſo verwandelt ſich der obige Ausdruck $\frac{(\sqrt{-1}-x)^n}{(\sqrt{-1}+x)^n} = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$ in folgende Gleichung:

$$\frac{\left(\varepsilon - \frac{b}{\beta}\right)^n}{\left(\varepsilon + \frac{b}{\beta}\right)^n} = \frac{\varepsilon - \frac{p}{\pi}}{\varepsilon + \frac{p}{\pi}};$$ das iſt, unter einerley Benennung

$$\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p};$$ aber es iſt

Nr. II. $\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}$ wie §. 1103. gezeigt werden ſoll; folglich

$$\left(\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}.$$

Es iſt ferner

Nr. III. $\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{(\beta + b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)}{(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)}$, wie leicht erhellet nach §. 56.

aber der Diviſor $(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon) = 1$; denn

das

das wirkl. Produkt $(\beta^2 - b^2\varepsilon^2 = (\cos.\phi)^2 - (\sin.\phi.)^2 - 1.$
Wenn man die Werthe $= (\cos.\phi)^2 + (\sin.\phi)^2 - 1$
ſubſtituirt, wo auch

$\varepsilon^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ wird.

folgl. $\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = (\beta + b\varepsilon)^2$; da aber oben Nr. II.

$\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}$ ſo iſt

$\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = (\beta + b\varepsilon)^2$; folgl. zur Potenz n elevirt, nach §. 184.

$\frac{(\varepsilon\beta - b)^n}{(\varepsilon\beta + b)^n} = (\beta + b\varepsilon)^{2n}$; da aber Nr. I.

$\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$, ſo iſt

Nr. IV. $(\beta + b\varepsilon)^{2n} = \frac{\varepsilon\pi - p.}{\varepsilon\pi + p}$

Weil endlich auf eine ähnliche Weiſe wie Nr. II. III.
$\frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p} = (\pi + p\varepsilon)^2$ gefunden wird; ſo iſt

Nr. V. $\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = (\pi + p\varepsilon)^2$; oder nach Nr. IV.

$(\beta + b\varepsilon)^{2n} = (\pi + p\varepsilon)^2$; das iſt im Werth der Buchſtaben.

$(\cos.\phi \pm \sin.\phi\sqrt{-1})^n = \cos.n\phi \pm \sin.n\phi\sqrt{-1}$
wie ſchon im §. 751. unabhängig von dieſen Gründen gezeigt worden.

§. 1103. Anmerk. Daß $\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}$, erhellet, wenn man den Werth von ε ſubſtituirt, und $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ mit $-\sqrt{-1}$ gehörig nach §. 336. verwechſelt; denn in dieſem Werth iſt der erſte Ar-

Ausdruck $\frac{\sqrt{-1}\beta - b}{\sqrt{-1}\beta + b} = \frac{\beta - b}{-\sqrt{-1}} : \frac{\beta + b}{-\sqrt{-1}} = \frac{\beta - b}{-\sqrt{-1}} \cdot \frac{-\sqrt{-1}}{\beta + b}$
$= \frac{-\sqrt{-1}\beta + b\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}\beta - b\sqrt{-1}} = \frac{\beta + b\sqrt{-1}}{\beta - b\sqrt{-1}} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}$,
wenn man ε wieder ſubſtituirt.

§. 1104. Anmerk. Dieſe Methode hat Joh. Bernoulli in den Act. Erud. 1712. bekannt gemacht, und noch viele andere nützliche Folgen daraus hergeleitet.

Herrn Eulers und Clairaut Betrachtungen über die Differenziale der Funktionen, die zwo und mehr veränderliche Größen enthalten.

§. 1105. Lehrſatz. Es ſey V eine Funktion von xy, oder x, y vermiſcht: man differenzire V dergeſtalt, daß man zuerſt nur x veränderlich ſetzt, und das Differenzial wieder, aber ſo, daß man nur y veränderlich ſetzt; zweytens differenzire man V auch ſo, daß man nur y veränderlich, und dieß Differenziale wieder, aber ſo, daß man nur x veränderlich ſetzt, ſo wird die zweyte Differenziation in beyden Fällen gleich ſeyn. Denn es ſey

$V = xy$, ſo iſt nach

Nr. I. ydx erſtes Differenzial: $dydx$ zweytes Differenzial.
Nr. II. xdy erſtes Differenzial: $dxdy$ zweytes Differenzial;

aber $dydx = dxdy$, folglich giebt die zweyte Differenziation allemal in dieſem Fall und unter der gegebenen Bedingung einerley Differenziale.

§. 1106. Zuſatz. Eben ſo wird man finden, daß, wenn man bey drey veränderlichen Größen xyz auf eben dieſe Bedingungen differenzirt, das drittemal einerley herauskomme; und ſo geht das Geſetz bey mehrern veränderlichen Größen fort, wenn keine von der andern beſtimmt wird; und man alſo, welche man will, unveränderlich annehmen kann.

§. 1107. **Willk. Satz.** $\frac{dV}{dy}$ bedeute, daß V ſo differenzirt werde, daß nur y als veränderlich angenommen worden. Ferner, man heiſſe bey einer Differenzialgröße, wo x, y und ihre Differenziale vermiſcht ſind, alles dasjenige P, was in dx, und alles dasjenige Q, was in dy multiplizirt wird.

§. 1108. **Lehrſatz.** Wenn $dV = Pdx + Qdy$, ſo iſt $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Beweis.

$dV = Pdx + Qdy$ nach der Vorausſetz; folglich $\frac{dV}{dx} = P$, und $\frac{dV}{dy} = Q$. Man differenz. nun noch einmal nach §. 1105.

ſo iſt $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$ nach eben dieſem §.

§. 1109. **Anmerk.** Um den zweyten Satz, daß $\frac{dV}{dx} = P$, und $\frac{dV}{dy} = Q$, beſſer zu verſtehen, merke man folgenden Lehrſatz.

§. 1110. **Lehrſatz.** Jede gleichartige Funktion von x, y läßt ſich, wenn $y = zx$ geſetzt wird, durch ein Produkt aus einer Potenz von x in eine Funktion von z ausdrücken.

Beweis.

A, B ſey die Funktion von x, y; Z, W von z.

Oder es ſey $A = x^{\lambda} Z$,

$B = x^{\varkappa} W$; ſo iſt dividirt

$\frac{A}{B} = x^{\lambda - \varkappa} \frac{Z}{W}$

Es ſey $\frac{Z}{W} = T$ eine Funktion von z, und

$\lambda - \varkappa = n$; und $\frac{A}{B} = V$; ſo iſt

$V = x^n . T$, und $dV = nx^{n-1}Tdx + x^n dT$.

§. 1111. Zuſatz. Es ſey $dT = Rdz$, ſo iſt
$dV = dx^{n-1}Tdx + x^n dT$; es ſey ferner
$dV = Pdx + Qdy$; aber
$dy = xdz + zdx$, weil $y = zx$ oben geſetzt iſt;

$dV = Pdx + Qzdx + Qxdz$; nun beſtimmen x und y
$dV = nx^{n-1}Tdx + x^n Rdz$ einander nicht, alſo vergl. giebt
$Pdx + Qzdx + Qxdz = nx^{n-1}Tdx + x^n Rdz$; alſo giebt es eine Gleichung zwiſchen den Gliedern, die dx, und eine andere zwiſchen denen, die dz enthalten; folglich iſt

I. $Pdx + Qzdx = nx^{n-1}Tdx$: dx

$P + Qz = nx^{n-1}T$;

Aber es iſt $nx^{n-1}T = \frac{nV}{x}$

$P + Qz = \frac{nV}{x}$

$z = \frac{y}{x}$ nach §. 1119.

$P + Q\frac{y}{x} = \frac{nV}{x}$. x

$Px + Qy = nV$.

II. $Qxdz = x^n Rdz$: dz

$Qx = x^n R$

§. 1112. Willk. Satz. Wenn P eine Funktion von xy zugleich iſt, und man integrirt Pdx ſo, daß man y unveränderlich, und nur x für veränderlich anſieht, ſo drückt man das Integrale aus, $\int(x) Pdx$, z. E. $\int(x)yx^3dx = \frac{1}{4}yx^4$, wo y unveränderlich angenommen worden.

§. 1113. Zuſatz. Alſo das Differenziale von $\int(x) Pdx = Pdy$, wenn nur x veränderlich iſt; iſt aber die Funktion von x, y, vermengt, die V heiſſen ſoll, ſo iſt, wenn beyde Gröſſen veränderlich ſind $dV = Pdx + Qdy$; wo wiederum $\frac{dV}{dx} = P$.

§. 1114. **Lehrſatz.** Wenn $\int Pdx + Qdy = Z$, und $Q = G + H$, ſo wird H kein x enthalten, ſondern eine Funktion blos von y ſeyn.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \\ \frac{dP}{dy} = \frac{dG}{dx} \end{array}\right\} \text{ nach §. 1108.}$$

folglich

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dQ}{dx}.$$

$Q = G + H$ nach der Vorausſetzung

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d(G+H)}{dx.} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx};$$ alſo

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx};$$ das iſt

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dx} + 0,$$ alſo $\frac{dH}{dx} = 0$; das iſt

H kann kein x enthalten.

§. 1115. **Erläuterung.** Man ſuche das Integrale aus $3x^2y^2dx+(2yx^3+4ay^3)dy = dZ$ nach dieſer Formel, ſo iſt nach §. 1108.

$P = 3x^2y^2$; und $Q = (2yx^3 + 4ay^3)$ folgl.

$dP = 6x^2ydy$, wo x unverändert. angeſehen wird; und $\frac{dP}{dy} = 6x^2y$.

Dieſer Ausdruck iſt $= \frac{dQ}{dx}$, weil $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ nach §. 1108.

folglich

$6x^2y = \frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$ Es iſt ferner

$V = f(x)Pdx$ nach §. 1113., und weil
$P = 3x^2y^2$; ſo iſt
$Pdx = 3x^2y^2dx$, und integrirt nach den gewöhnl. Regeln,
$f(x)(Pdx) = x^3y^2$, wo y unveränderlich; alſo
$V = x^3y^2$; folglich
$dV = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$, wo x, y veränderlich, alſo $G = 2x^3y$; $H = 4ay^3$, und daher
$Z = x^3y^2 + ay^4$; das Integrale;

denn wenn man dieſes Integral wirklich wieder nach den allgemeinen bekannten Regeln differenzirt, ſo kömmt der erſte im Exempel gegebene Ausdruck wieder heraus, nämlich das Differenziale oder $d(x^3y^2+ay^4) = 3x^2y^2dx+2x^3ydy+4ay^3dy$.

§ 1116. Anmerk. Der Gebrauch von den hier kürzlich berührten Sätzen zeiget ſich bey verſchiedenen ſchweren Integrationen. Herr Prof. Euler und Herr Clairaut haben ſie jeder für ſich erfunden, und bekannt gemacht, jener in Inſt. Calc. diff. P. I. c. 7.; dieſer in Mem. de l'Acad. des Sciences à Paris 1740. unter dem Titel: ſur l'integration des equations differentielles; Herr Prof. Käſtner und Herr Prof. Karſten haben ſie in ihren Schriften erläutert.

Die Lehre von der Evolution, Evoluten, und aus Evolution erzeugten Linien, den Krümmungszirkeln und Radien (circulis curvaturæ, radiis oſculi.)

§. 1117. Erklär. Wenn *Fig.* 121. NV = NM Sehnen einer krummen Linie ſind, und durch deren Punkte M, N, V ein Zirkel beſchrieben wird, deſſen Mittelpunkt K ſich geometriſch beſtimmen läßt, ſo heißt der Zirkel (circulus curvaturæ) der Krümmungszirkel (auch circulus oſculator), und ſein Radius MK iſt der Radius oſculi. Man ſetzt aber voraus, daß die Punkten V, M ſich dem Punkt unendlich nähern, und in dieſer unendlich kleinen Diſtanz werden ſie vom Krümmungszirkel berührt. Die Linien MH, NW ſeyn Tangenten

genten der krummen Linie; daher HW eine Tangente zugleich vom circulo curvaturæ iſt; THD iſt der Krümmungswinkel (Angulus curvaturæ).

§. 1118. **Lehrſatz.** Man heiſſe den Zenterwinkel MKN $= x$, ſo iſt MNH $= \frac{1}{2}x$.

Beweis.

$$MNH = HNK - MNK = 90^\circ - MNK; \text{ aber nach §. 469. } MNK = 180^\circ - x = 90^\circ - \tfrac{1}{2}x$$

$$MNH = 90^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}x) = 90^\circ - 90^\circ + \tfrac{1}{2}x; \text{ das iſt } MNH = \tfrac{1}{2}x.$$

§. 1119. **Lehrſatz.** Wenn die Punkten M, V ſich unendlich nähern, ſo wird zuletzt der Winkel THD $= x$.

Beweis.

$$HNM = 180^\circ - WNV - MNV \text{ §. 44?. } MNV = 2MNK$$

$$HNM = 180^\circ - WNV - 2MNK, \quad MNK = \frac{180^\circ - x}{2}$$

$HNM = 180^\circ - WNV - (180^\circ - x)$; das iſt
$HNM = 180^\circ - WNV - 180^\circ + x = x - WNV$.
Es ſey $WNV = HMN + d.HMN$; ſo iſt
$HNM = x - HMN - dHMN$. folgl. iſt herübergeſetzt
$HNM + HMN + dHMN = x$; aber
$HNM + HMN = THD$ nach §. 470. folglich ſubſtit.
$THD + dHMN = x$. Wenn nun dHMN unendlich abnimmt, ſo wird endlich THD $= x$.

§. 1120. **Lehrſatz.** Der Radius oſculi MK iſt $\frac{ds}{THD}$.

Beweis.

MK = $\frac{1}{2}$MN : ſin.$\frac{1}{2}x$. nach trigonometriſchen Gründen. Wenn aber M, N ſich unendlich nähern, ſo wird aus der Sehne NM der unendlich kleine Bogen; und verwandelt ſie ſich alſo in ds; eben ſo verwandelt ſich ſin.$\frac{1}{2}x$ in $\frac{1}{2}x$ ſelbſt; aber $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$THD; folgl. MK in dieſem Fall $\frac{1}{2}$MN : $\frac{1}{2}$THD=MN:THD= $\frac{ds}{THD}$.

§. 1121. Anmerk. Aus der Gleichung für die krumme Linie muß hernach ... und THD beſtimmt werden; THD iſt nämlich der Krümmungswinkel; welcher aus der Natur der krummen Linien zu beſtimmen iſt; wir haben nur die Art anzeigen wollen, wie es geſchieht; die Rechnung würde hier zu weitläuftig ſeyn. Zu einer vollſtändigen Ausführung gehört auch die Lehre von den Wendungen und Rückkehrpunkten, wenn eine krumme Linie bald die hohle, bald die erhabene Seite herauskehrt, wie eine Schlangenlinie, und die Tangenten alſo bald oberhalb, bald unterhalb der Linien liegen; allein die Hauptbegriffe davon ſind ſchon hier vorgetragen; und man wird aus dem bisherigen in den Stand geſetzt werden, Schriften davon leſen zu können, wenn man ſich in dieſe Materie einlaſſen will, die eben keinen ſo groſſen Einfluß, wie die übrigen in die angewandte Mathematik haben und endlich in einem Kompendium eher als in Quartanten von Elementen der Mathematik, wo ſie nicht einmal genannt ſind, nur kürzlich berühret werden dürfen.

§. 1122. Erklär. Die Evolution zu verſtehen, muß man nur auf zwo krumme Linien acht haben: die eine iſt diejenige, von welcher die krumme Linie durch Abwicklung entſteht; die andere iſt die abgewickelte Linie ſelbſt. Man ſetze eine krumme Linie von was immer einer Gattung man will, nur daß ſie keinen Wendungs- oder Rückkehrpunkt habe, um deren erhabene (convexe) Seite ein Faden gewunden ſey; man winde den Faden ſo ab, daß er immer geſpannt bleibe oder eine gerade Linie mache; ſo wird der Endpunkt oder die Extremität des Fadens eine krumme Linie beſchreiben, welche (curva ex evolutione genita) die aus der Abwickelung erzeugte krumme Linie heißt, die Linie aber, von welcher der Faden abgewickelt wird, heißt die Evoluta. Der geſpannte Faden kann

den Radius oſculi vorſtellen, der aber alle Augenblick ſich ändert, und alſo, wie oben, nur in dem Fall, wenn zween Punkten der neu entſtandenen krummen Linie unendlich nahe ſind, ſich gleich bleibet.

§. 1123. **Zuſatz.** Es ſey *Fig.* 118. AC die Evolute, ſo iſt DEA, die ex evolutione genita, und der Radius oſculi = DA + AC = EC; denn der Faden kann auch von A nach D vorher ſchon, ehe er ſich abwickelt, in eine gerade Linie ausgeſpannt ſeyn.

§. 1124. **Lehrſatz.** Aus der Gleichung für die aus der Evolution erzeugte Linie läßt ſich eine Gleichung für die Evolute finden.

Beweis.

Es ſey *Fig.* 118. DL die gemeinſchaftliche Abſciſſenlinie für beyde Krumme DE und AC. Man ſetze DA ſey = x, AE = y, und die Koordinaten rechtwinklicht; ferner DL = v, LC = t, EC = z, und EO = w. Es iſt aber, weil $\triangle EAO \sim \triangle OLC$,

EO : EA = OC : CL, und verſetzt
EO : OC = EA : CL
EO + OC : EO = EA + CL : EA; das iſt
EC : EO = EA + CL : EA.; und verſetzt
EO : EA = EC : EA + CL. Alſo in Buchſtaben:

$$w : y = z : \frac{yz}{w} = t + y; \text{ folglich}$$

$$\frac{yz}{w} - y = t, \text{ das iſt}$$

$$\frac{yz - yw}{w} = \frac{(z - w)y}{w} = t.$$

Nun iſt

Nr. I. EO : OA = OC : OL, und verſetzt.
EO : OC = OA : OL, und add.
EO + OC : OC = OA + OL : OL; das iſt in der Figur.

EC

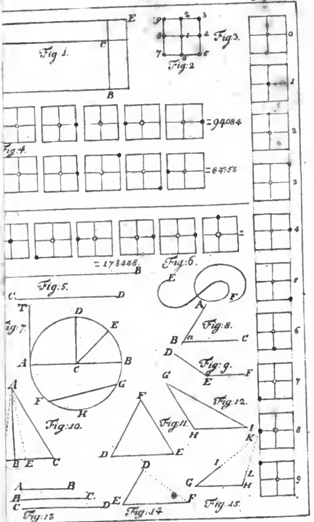
EC : OC = AL : OL; und verſetzt:
Nr. II. EC : AL = OC . OL; aber
OC : OL = EO : OA Nr. I.

EC : AL = EO : OA, oder umgekehrt
EO : OA = EC : AL = v — x = DL — DA.

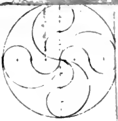
§. 1125. **Zuſatz.** Wenn alſo die aus der Evolution erzeugte Linie, algebraiſch iſt, ſo iſt auch ihre Evolute algebraiſch, aber nicht umgekehrt.

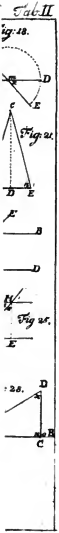
§. 1126. **Anmerk.** Die Lehre von der Evolution hat Herr Prof. Euler Comm. Ac. Imp. Petrop. T. XII. am vollſtändigſten abgehandelt. Der erſte, der davon was gemeldet, war Hugenius, der die Cykloide beſchrieben, als eine krumme Linie, die ihrer Evolute, dem Zirkel, gleich iſt. Der Nutzen davon zeigt ſich in dem Horologium oſcillatorium, und überhaupt in der Mechanik. Auſſer dieſer, nämlich der Cycloid, davon wir in verſchiedenen Stellen, gehandelt haben, ſchienen die Betrachtungen über die Evolution, wenn man den Nutzen, den man bey Integrationsformeln hat, ausnimmt, mehr zu einer mathematiſchen Spekulation zu dienen, als daß ſie von beſonderem Gebrauch wären. Jak. Bernoulli hat ſich auf dieſe Weiſe an der logarithmiſchen Spirallinie, die ſeine Erfindung war, ungemein ergötzt, weil ſie nach unzähligen Veränderungen und Wendungen, wodurch ſonſt in andern Fällen andere krumme Linien entſtehen, ſich dennoch ſelbſt immer wieder darſtellt; zu welchem Ende er ſie auch als ein Sinnbild der Auferſtehung mit der Innſchrift: Eadem mutata reſurgo, auf ſeinen Grabſtein ſetzen ließ.

§ 1127. **Anmerk.** Dieß iſt nun dasjenige, was wir von der höhern Geometrie in dem gegenwärtigen Kompendium vortragen wollten. Wir glauben nicht; daß irgend eine Materie von Wichtigkeit übergangen worden ſey, und dürfen uns dießfalls auf ſolche Leſer berufen, welche Kenner von der Sache ſind, und wiſſen, wie man ſolche Lehren in einem Auszug vortragen ſoll, damit man im Folgenden einen Nutzen davon habe, und in den Stand geſetzt werde, weitere mathematiſche Schriften mit Nutzen zu leſen. Unſere nächſte Beſchäftigung wird alſo auf die angewandte Mathematik gehen, worinnen nach dem bisherigen Plan fortzuarbeiten uns angelegen ſeyn wird.



...lemms Geometrie I. Theil.




Tab. II
ig: 18.
D
E
C
Fig: 21.
D
E
E
B
D
Fig 25.
E
: 28.
D
B
C

Tab II

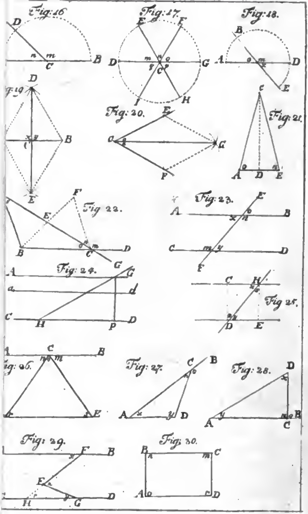


Fig: 16
Fig: 17
Fig: 18
Fig: 20
Fig: 21
Fig: 22
Fig: 23
Fig: 24
Fig: 25
Fig: 27
Fig: 28
Fig: 29
Fig: 30

Tab: III.

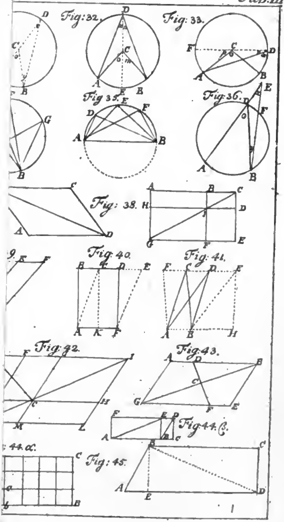
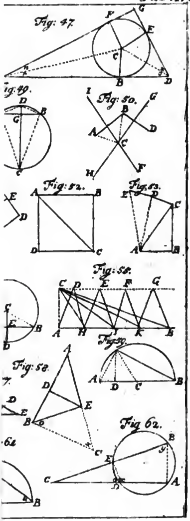
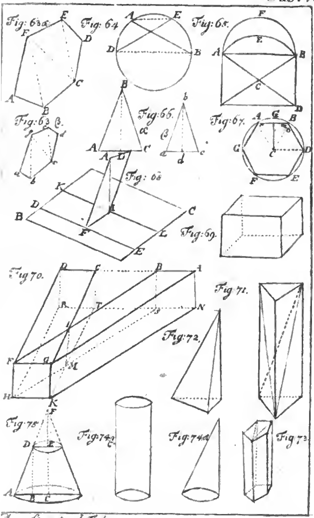


Fig: 32.
Fig: 33.
Fig 35.
Fig: 36.
Fig: 38.
Fig: 40.
Fig: 41.
Fig: 42.
Fig: 43.
Fig: 44. β.
44. α.
Fig: 45.

Tab: IV.

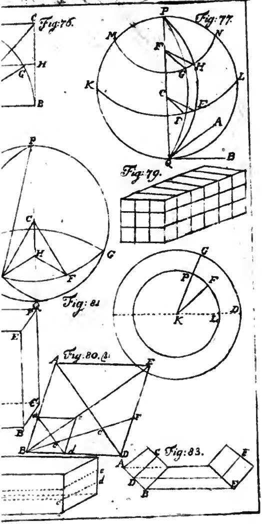


Tab: V.

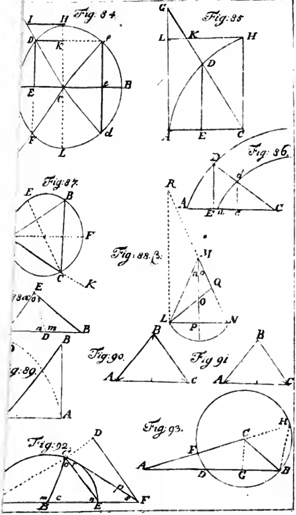


Themas Geometrie. I Theil

Tab: VI.



Tab. VII



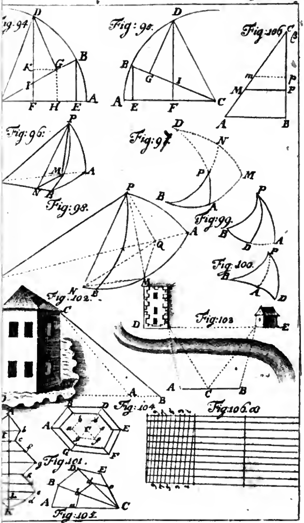


Fig: 94
Fig: 95.
Fig: 106
Fig: 96:
Fig: 97
Fig: 98.
Fig: 99.
Fig: 100.
Fig: 102.
Fig: 103
Fig: 104
Fig: 106. a
Fig: 101.
Fig: 105

Fig: 108.

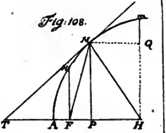
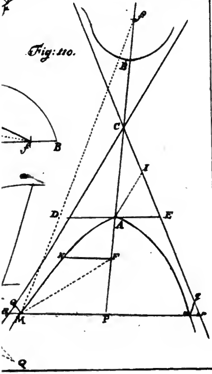


Fig: 110.



eil.

Tab: X.

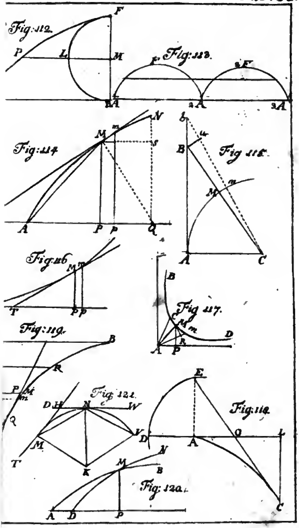


Fig:112.
Fig:113.
Fig:114
Fig 115.
Fig:116
Fig 117.
Fig:118.
Fig:119.
Fig: 120.
Fig: 121.

LIBERTA
PATRIA

Digitized by Google

[illegible] Google